

# Některé aspekty při tlakovém řezání materiálu

Radimír Novotný

Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích

## Abstrakt

Technologie řezání – zejména pak efektivita rozpojování hmoty z hlediska rychlosti, přesnosti a energetické (ne)náročnosti jejího řezu – náleží nejen k historicky nejstarším projevům uplatňování techniky v nejběžnější praxi, nýbrž i k doposud nejdůležitějším aktivitám většiny výrobních procesů v současné industriální společnosti. Příspěvek se snaží na principech klasické mechaniky objasnit, analyzovat a diskutovat některá hlediska tlakového řezání materiálu.

**Klíčová slova:** tlakové řezání, klínový efekt, příčný tah, penetrace do materiálu pevné fáze, namáhání řezem oslabeného profilu

## Úvod

Při rozpojování materiálu řezáním hraje zásadní, principiální důležitost, o jaký způsob řezání vlastně běží. V zásadě je třeba rozlišovat mezi **řezem tlakovým** a **řezem smykovým (kluzným)**. Zatímco u tlakového řezu je ostří bříty vtlačováno do materiálu, kdy smýkání čepel má podružný (až nulový) efekt – jde o jakési krájení -, pak u kluzného řezání je penetrace bříty do materiálu podmíněna především jeho smýkáním napříč řezanou hmotou (na způsob jakéhosi pilování popř. „propilování“), kdy naopak tlak na čepel hraje spíše podružnější roli. Vidíme, že oba způsoby řezání využívají jak tlaku na břit čepel, tak i jejího smýkání, avšak s různou měrou fyzikální dominance obou z uvedených efektů. Lze-li tedy při ryze tlakovém řezání ztráty materiálu „obrusem“ prakticky vyloučit, jsou větší či menší úbytky materiálu při kluzném řezání pravidlem.

Z vědeckých experimentů i praktických zkušeností je dobře známo, že pro tlakové řezání jsou vhodné čepel spíše s hladkým (nezazubeným) ostřím, zatímco pro kluzné řezání je mnohem výhodnější ostří zubaté, přičemž jeho textura může být od „velmi jemné“ až po „hrubou“, a to s nejrůznější geometrií zazubení a s tím, že ostří je tvořeno bodovými hroty (zuby) navzájem propojenými vybroušenými (a zpravidla i vyleštěnými) většinou konkávně zakřivenými či přímými dílčími hladkými břity. Bez ohledu na dezén zazubeného bříty bývá

kluzné řezání rychlejší (agresivnější), než je tomu u řezu tlakového. Ukazuje se, že smykové řezání je vhodné jednak pro tvrdší a houževnatější materiály a jednak pro materiály vláknité (např. látky, koberce a lana), ale že není přesné; ohraničení řezu bývá nejasně omezeno a navíc porušené resp. roztržené. Diskutabilní je i namáhání a životnost ozubených ostří, která se velice obtížně regenerují (brousí). Tlakové řezání je naproti tomu vhodné pro materiály měkké až středně tvrdé a produkuje přesné a plynulé řezy. Uplatní se tak především u nejjemnějších prací (např. v chirurgii, řezbářství apod.), břit však musí být často broušen (ba i leštěn), což se však daří mnohem lépe, než je tomu v případech ostří zazubených.

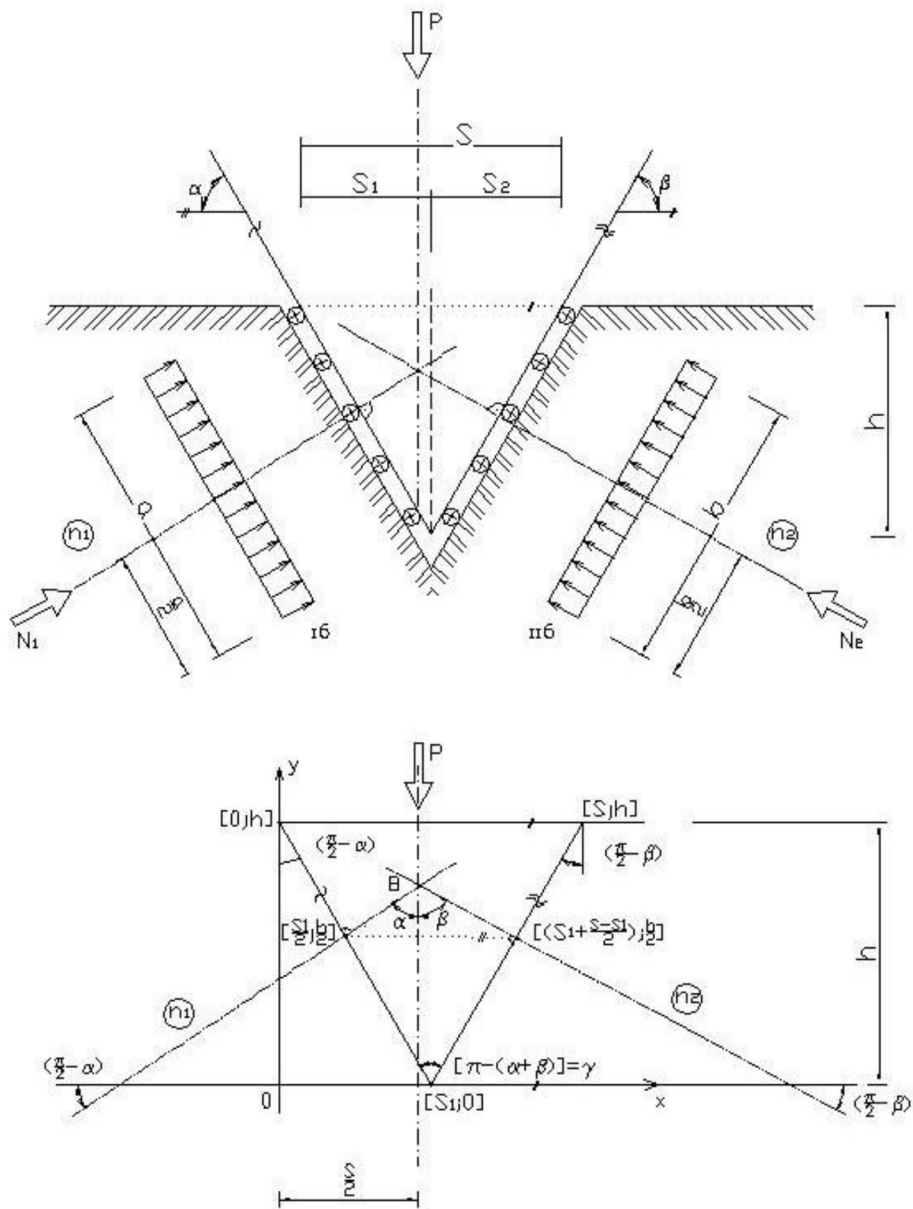
Materiál břitu řezacích nástrojů je všeobecně vzato (mnohem) tvrdší než vlastní řezaný materiál a jejich účinnost bývá dosti podstatně ovlivněna jednak průběhem jejich čepelí v longitudinálním směru (zakřivená čepel v podélné rovině dává zpravidla lepší řezný efekt než čepel přímá) a jednak geometrií příčného profilu čepelového břitu. Příčný průřez ostří je buď **klínový** (rovinné fazety ve tvaru písmene „V“), **konkávní** (též dutý – na způsob břitvy) nebo **konvexní** (také vydutý – na způsob sekery), přičemž čím je menší břitový úhel (mezi přiléhajícími fazetami), tím lépe ostří „řeže“, ale tím je také čepel nepříznivěji namáhána (tendence k lokálnímu příčnému vyboulení ostří v případě jeho nedostatečného zakalení anebo přímo k jeho místnímu vylomení). Dosti podstatnou roli – zejména v případě tlakového řezu – hraje ta okolnost, je-li příčný profil břitu vybroušen **jednostranně** (jedna či více fazet z jedné strany čepel) či **oboustranně**. Zkušenosti ukazují, že při volbě geometrie čepel i jejího ostří je třeba pečlivě zvážit nejen materiály, s nimiž (a na nichž) se pracuje, ale také i způsob a „dynamiku“ vlastního opracování.

V následujícím textu se zaměříme na analýzu tlakového řezání a jeho princip bude ukázán na kolmé penetraci klínového hladkého a přímého ostří do materiálu s rovinnou úpravou svého povrchu na styku s břitem, přičemž budeme předpokládat jednotkovou délku ostří.

## Penetrace nesymetrického klínu do materiálu při zanedbání tření i adheze

Jak již bylo naznačeno v úvodním odstavci, budeme předpokládat obecný nesouměrný klín sestávající z dvojice oboustranných rovinných fazet, který svisle proniká do vodorovné a po celé ploše podepřené desky z materiálu měkkého, než je materiál klínu, viz obrázek č. 1 a č. 2. Toto uspořádání tlakového řezu (zde za vyloučení smykového řezného efektu) prozatím nedbá faktické přítomnosti „přídavných“ napětí (od teoretického – byť nepatrného – ohybu řezané desky), přičemž nezbytné vytvoření elementárního klínu je podmíněno nutným průnikem „nekonečně“ ostrého břitu do materiálu desky v důsledku (zpočátku) „nekonečně“ velkého normálového napětí pod břitem. (Samozřejmě, úplná eliminace zmíněných „přídavných“ napětí v desce by předpokládala její „dokonale“ nepoddajné podepření v jistém okolí břitu, které vykryje určitá kontaktní normálová napětí pod krájenou deskou. Tato zřejmá okolnost není v tomto příspěvku zobrazena ani detailně řešena, bude nicméně ještě diskutována

Obrázek 1: Model penetrace oboustranného nesymetrického klínu za tlakového řezu



Zdroj: vlastní

v závěru). Předpokládejme ponejprv, že mezi fazetami čepel a porušeným materiálem desky nedochází ke tření. Takovouto penetrační situaci opět modelově vystihují obrázky č. 1 a 2. Všimněme si, že obě fazety jsou namáhány pouze normálovými napětími  $I\sigma$  a  $II\sigma$ , o nichž budeme předpokládat, že jsou stálá vzhledem k hloubce penetrace  $h$ . Tehdy v těžištích obou napjatostních obrazců vyvstanou reakční normálové síly  $\vec{N}_1$  a  $\vec{N}_2$ , které budou kolmé k příslušným rovinným fazetám a budou v rovnováze s čepelovou svislou silou  $\vec{P}$ , takže  $\vec{P} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ . Nyní vyvstává otázka, kde je možné očekávat pozici čepelové síly velikosti  $P$ . Vzhledem k tomu, že vektory normálových sil leží v odpovídajících přímkách  $n_1$  a  $n_2$ , musí vektor akční čepelové síly  $\vec{P}$  procházet průsečíkem  $B$  obou paprsků  $n_1$  a  $n_2$ . Orientujeme-li se podle obrázku 1, snadno stanovíme (i ověříme) rovnice obou paprsků:

$$n_1 \equiv y_1 = \frac{s_1}{h} \cdot x - \frac{s_1^2 - h^2}{2 \cdot h}$$

a

$$n_2 \equiv y_2 = -\frac{s - s_1}{h} \cdot x + \frac{h^2 + s^2 - s_1^2}{2 \cdot h}.$$

Odsud pro  $x$ -ovou souřadnici průsečíku  $B$  z podmínky  $y_1 = y_2$  analyticky vychází  $x = \frac{s}{2}$ .

Odvozený výsledek ukazuje, že realizuje-li se odpor materiálu proti vnikání břitu čepel podle uvažovaných předpokladů, leží akční „řezná“ síla vždy uprostřed šířky  $s$ , a to bez ohledu na to, že je břit asymetrický;  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ . Čtenář si snadno dovodí, že tento závěr platí i pro nejvyšší míru břitové nesouměrnosti  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  a  $\beta = \frac{\pi}{2}$  resp.  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  a  $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ), přičemž normálové fazetové napětí nastává pouze v šikmé fazetě.

Nyní lze již přistoupit k napsání silových podmínek rovnováhy na klínu ve směru svislém i vodorovném, a to v intencích obrázků 1 i 2. Zřejmě platí

$$N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \cos\beta = P$$

$$N_1 \cdot \sin\alpha = N_2 \cdot \sin\beta.$$

Odsud pak ihned máme

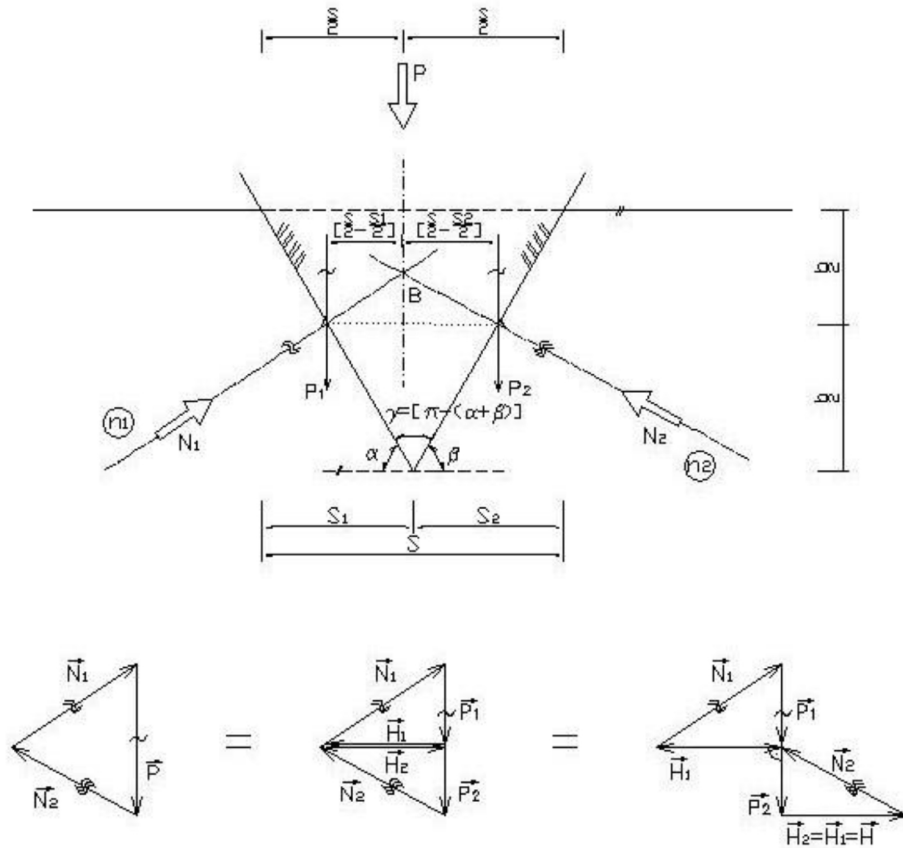
$$N_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot N_2 \tag{1}$$

a

$$N_2 = \frac{P}{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha + \cos\beta}, \tag{2}$$

a tedy

Obrázek 2: Silové poměry na oboustranném nesymetrickém klínu za tlakového řezu



Zdroj: vlastní

$$N_1 = \frac{P}{\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \cos\beta}. \quad (3)$$

Z podmínky  $H_1 = N_1 \cdot \sin\alpha = H_2 = N_2 \cdot \sin\beta = H$  pak po úpravě stanovíme

$$H = \frac{P}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}. \quad (4)$$

Vodorovnou tahovou sílu velikosti  $H$  definujeme jako tzv. **příčný tah**. Vzhledem k obrázkům 1 a 2 se přesvědčíme, že  $P = P_1 + P_2$ , kde podle (2), (3) a (4) platí

$$P_1 = \frac{P}{1 + \frac{tg\alpha}{tg\beta}} \quad (5)$$

a

$$P_2 = \frac{P}{1 + \frac{tg\beta}{tg\alpha}}. \quad (6)$$

Ověřme konečně platnost tvrzení o středové pozici síly  $\vec{P}$  vzhledem k šířce  $s$ . Tentokrát aplikujeme momentovou podmínku rovnováhy k bodu  $B$ , viz též obrázek č. 2. Dostaneme  $\left(\frac{s}{2} - \frac{s_1}{2}\right) \cdot P_1 = \left(\frac{s}{2} - \frac{s_2}{2}\right) \cdot P_2$ . Dosadíme-li do tohoto vztahu výrazy (5) a (6) a uvážíme-li, že platí  $s = s_1 + s_2$ ,  $s_1 = \frac{h}{tg\alpha}$  a  $s_2 = \frac{h}{tg\beta}$ , potvrdí se po úpravách, že uvedená rovnovážná podmínka je skutečně splněna.

Zbývá stanovit, pro jaké úhlové poměry na břitu čepelí vychází vodorovná síla  $H$  maximální. Za tímto účelem se zaměříme na **úhel břitu**  $\gamma = [\pi - (\alpha + \beta)]$ . Odsud plynou vztahy  $\alpha = (\pi - \gamma) - \beta$  a  $\beta = (\pi - \gamma) - \alpha$ . Podle nich a podle (4) lze rovněž zapsat

$$H(\alpha) = \frac{P}{\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg(\delta - \alpha)}}, \quad (7)$$

kde jsme použili substituci  $\delta = \pi - \gamma$ . Tuto rovnici – z hlediska „přehledné derivovatelnosti“ – upravme ještě do ekvivalentního tvaru

$$H(\alpha) = P \cdot \frac{tg\alpha}{(1 + tg^2\alpha)} - \frac{P}{tg\delta} \cdot \frac{tg^2\alpha}{(1 + tg^2\alpha)}. \quad (7a)$$

Nutná podmínka pro extrém funkce  $H(\alpha)$  zní  $\frac{dH(\alpha)}{d\alpha} = 0$ . Z této podmínky po úpravách dospějeme k podmínce

$$(1 - 2 \cdot \sin^2\alpha) - \frac{1}{tg\delta} \cdot 2 \cdot tg\alpha \cdot \cos^2\alpha = 0,$$

nebo-li (po dalších úpravách) konečně k výrazu

$$tg\delta = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg 2\alpha.$$

Z něho je patrné, že extrém (maximum;  $\frac{d^2H(\alpha)}{d\alpha^2} < 0$ ) nastane pro  $\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi - \gamma}{2}$ . Pak ale bude i  $\beta = \frac{\delta}{2}$ , viz výše. Ukázalo se, že **největšího příčného tahu** při tlakovém řezu lze dosáhnout jen za uplatnění **symetrických břitů**, kdy  $\alpha = \beta = \frac{\pi - \gamma}{2}$ , to jest když nastane  $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$ . Tehdy vyjde ze (7)

$$H_{max.} = \frac{P}{2} \cdot tg\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right). \quad (8)$$

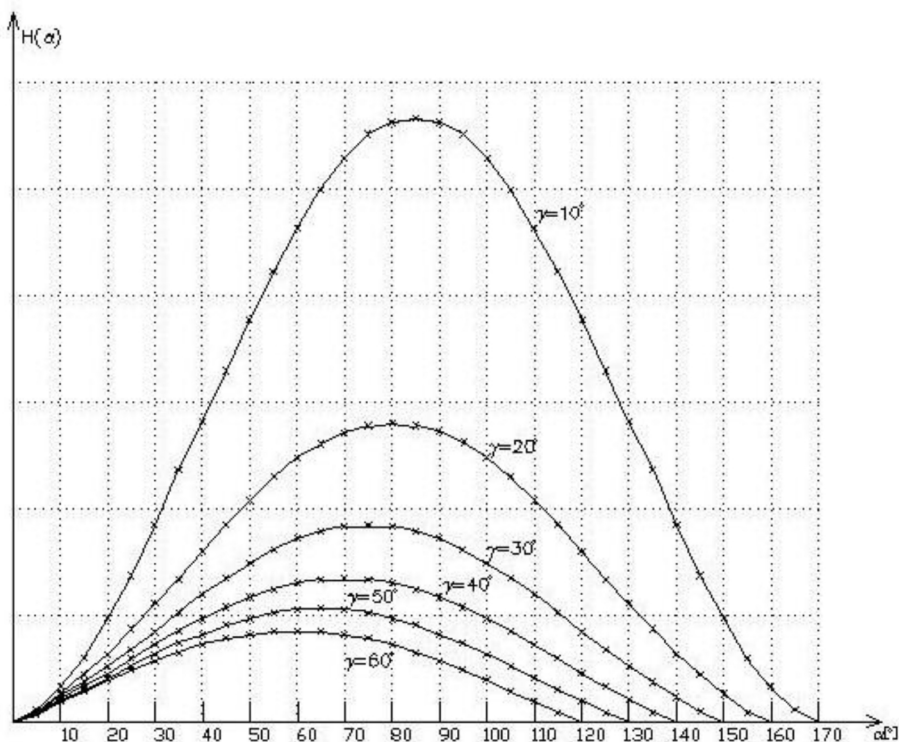
Vzorec (8) také ukazuje, že se **zmenšujícím se** úhlem břitu **vzrůstá** velikost příčného tahu. (Teoreticky totiž  $H_{max.} = +\infty$ ). Naopak, v případě jednostranného břitu, kdy např.  $\beta = \frac{\pi}{2}$  a  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ , dává vzorec (7) relativně menší velikost příčného tahu, a to pouze  $H = P \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) < H_{max.}$ . To odpovídá nerovnosti (pro reálné úhly v okolí břitu), totiž že  $tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) < \frac{1}{2} \cdot tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ . Závislost (7), kterou vyjádříme ve tvaru  $H(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg[(\pi - \gamma) - \alpha]}}$ , z něhož

je dobře patrné, že fazetový odklon  $\alpha$  je argument, zatímco břitový úhel  $\gamma$  a tlaková síla  $\vec{P}$  vztažená na jednotkovou délku čepel ( $[\frac{N}{cm}]$ ) jsou parametry, potom můžeme zobrazit pomocí obrázku č. 3, v němž jsou průběhy  $H(\alpha)$  ukázány pro reálně volenou „paletu“ břitových úhlů  $\gamma$ . (Je zřejmé, že fyzikální rozměr všech shora uvažovaných sil je vzhledem k předpokladu  $[\frac{N}{cm}]$ , takže napětí  $I\sigma = \frac{N_1}{a}$  resp.  $II\sigma = \frac{N_2}{b}$  mají rozměr  $[\frac{N}{cm^2}]$ ).

Dosavadní závěry odpovídají zavedeným předpokladům tak, jak je patrné i z obrázků 1 a 2. Upozorňujeme zejména na plné klínové uplatnění levé i pravé fazety vzhledem k hloubce zářezu  $h$ , resp. na nutnost vodorovnosti spojnice lomů levé a pravé fazety při zářezích hlubších než odpovídá úplnosti klínového efektu (předpokládáme jedinou fazetu zleva a jedinou fazetu zprava). Odvozené výsledky tedy nejsou „beze zbytku“ použitelné např. v tom případě, kdy spojnice obou uvažovaných fazetových lomů není horizontální (a rovnoběžná s horní úrovní řezaného materiálu při „hlubším“ zářezu). Poměrně pracnou analýzou se dá ukázat, že v takovémto případě je třeba počítat s tím, že akční tlaková síla  $\vec{P}$  dozná jistého vyosení mimo střed šířky břitu, a to i tehdy, zůstanou-li v platnosti předpoklady o rozložení normálových napětí  $I\sigma$  a  $II\sigma$ .

Všimněme si ještě tlakového řezání na způsob fungování štípacích kleští, které je způsobené současnou penetrací dvěma sousými klíny tak, jak je ukázáno na obrázku č. 4. Toto schéma umožňuje zachovat shora uvedené předpoklady jen tenkrát, půjde-li o symetrické kolineárně působící klíny, kdy zřejmě  $\alpha_i = \frac{\pi - \gamma_i}{2} = \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , přičemž oba břitové úhly  $\gamma_i$  jsou závazně dány. (Břitová nesouměrnost by vedla k neurčitosti této úlohy, a to nejen vzhledem k neudržitelnosti předpokladů o pozicích reakčních sil  $N_i$ , ale i vzhledem k jejich mnohosti;  $i = 1, 2, 3, 4$ ). Z obrázku č. 4 je patrné, že  $P = 2 \cdot N_1 \cdot \cos\alpha_1 = 2 \cdot N_2 \cdot \cos\alpha_2$  a zároveň že  $N_1 \cdot \sin\alpha_1 + N_2 \cdot \sin\alpha_2 = T$ , přičemž  $T$  je velikost příčné tahové síly.

Obrázek 3: Zobrazení závislosti  $H(\alpha) = \frac{P}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}[(\pi - \gamma) - \alpha]}}$  pro různé parametry  $\gamma$



Zdroj: vlastní

Z posledně uvedených vztahů ihned vyplývá

$$T = \frac{P}{2} \cdot \left[ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma_1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma_2}{2}\right) \right], \quad (9)$$

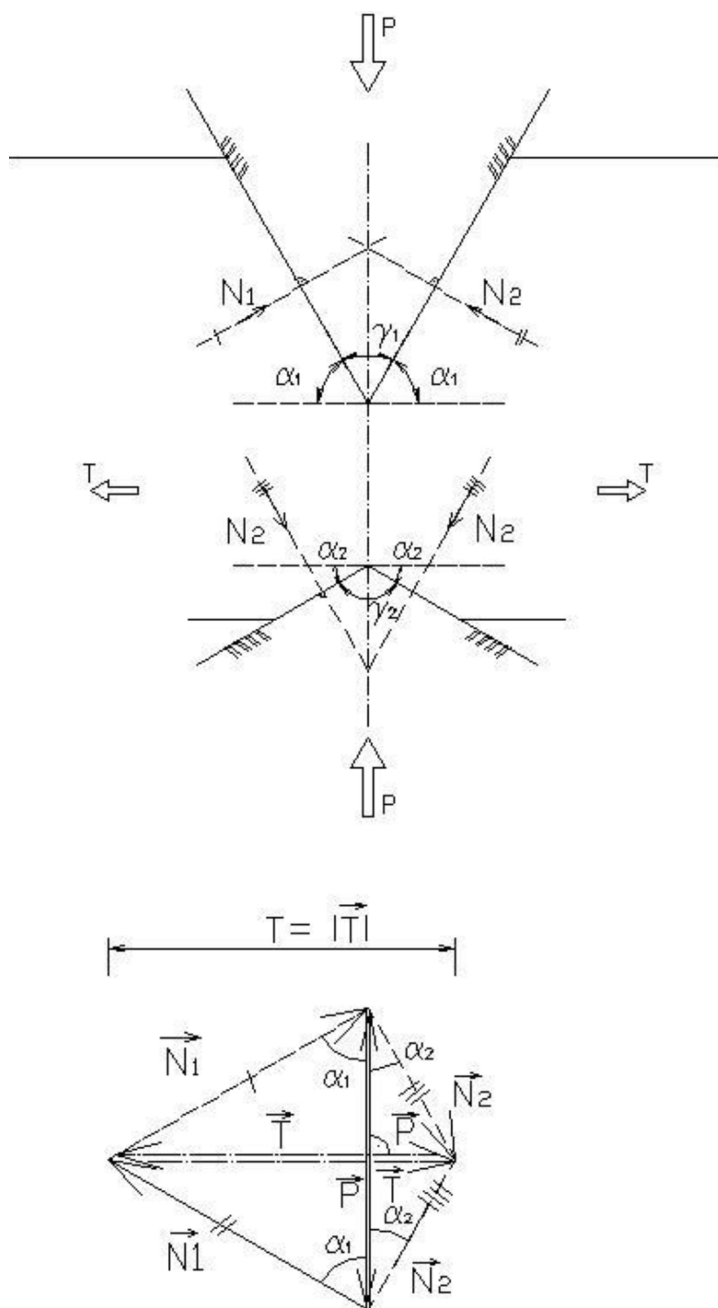
přičemž při  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  je i  $\alpha_1 = \alpha_2$  a vychází

$$T = P \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right). \quad (10)$$

Z odvozených závěrů (8) a (10) vidíme, že  $T > H_{max}$  (teoreticky  $T = 2 \cdot H_{max}$ ), jinak řečeno, dvojbřitové tlakové řezání (souosé štípání) je účinnější než tlakové řezání penetrací jediného břitu. Na tomto místě se nabízí otázka, totiž pro jaký břitový úhel  $\gamma^*$  za dvojbřitového štípání na způsob vztahu (10) obdržíme stejný příčný tah jako za tlakového řezání podle vztahu (8), v němž



Obrázek 4: Situace za tlakového řezání sousou penetrací dvojice symetrických klínů



Zdroj: vlastní

je patrně  $\gamma < \gamma^*$ ? Tato otázka ihned vede na rovnici  $P \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma^*}{2}\right) = \frac{P}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right)$ . Odsud úpravou dospějeme ke vztahu

$$\gamma^* = \pi - 2 \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right)\right]. \quad (11)$$

Výraz (11) ukazuje, že např. pro břitový úhel jediné čepele  $\gamma = 30^\circ$  vychází břitový úhel dvojice stejných sousých branží  $\gamma^* \approx 56^\circ$ , pro  $\gamma = 45^\circ$  vychází  $\gamma^* \approx 79^\circ$  atd.

## Penetrace nesymetrického klínu do materiálu při uvažování tření i adheze

V této kapitole budou přijaty analogické předpoklady jako v kapitole předchozí, zejména pokud jde o normálová fazetová napětí  $^I\sigma$  a  $^{II}\sigma$ , potažmo o pozici reakčních normálových sil  $\vec{N}_1$  a  $\vec{N}_2$  za jednobřitého tlakového řezání. Ty mají ležet v přímkách  $n_1$  a  $n_2$  (a protínat fazety v polovinách jejich délek (z hlediska pohledu na příčný řez)), které však budou poněkud odkloněny od normál k fazetám v důsledku tření mezi břitem a řezaným materiálem. Tyto odklony (třecí úhly) označíme  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$ , takže vlastně rozlišíme různé koeficienty tření  $\operatorname{tg}\varepsilon_1$  resp.  $\operatorname{tg}\varepsilon_2$  mezi levou resp. pravou fazetou a řezaným materiálem (vzájemná jakost provedení povrchu fazet se může lišit), viz obrázek č. 5. Ačkoliv přesnou lokalizaci tlakové řezací síly  $\vec{P}$  nepokládáme za natolik důležitou (viz předchozí kapitola), poznamenejme, že tento vertikální vektor při uvažování tření již obecně nepůlí šířku  $s$  břitu. Důkaz tohoto tvrzení je obdobný, jak shora ukázáno a ponecháváme jej na čtenáři. **Třecí odpory** tedy kvantifikujeme

$$T_1 = N_1 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_1 \quad \text{a} \quad T_2 = N_2 \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_2. \quad (12)$$

(Zde pozor na odlišení třecích sil velikostí  $T_i$ ;  $i = 1, 2$  podle (12) od příčného tahu velikosti  $T$  za sousého štípání v předchozí kapitole podle (9) a(10)!). Označíme-li dále  $a[MPa]$  jako **adhezi** (jde o jakousi přilnavou „lepivost“ fazet břitu k řezanému materiálu), lze vyjádřit velikosti odpovídajících adhezivních sil jako

$$A_1 = a \cdot h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{a} \quad A_2 = a \cdot h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}}. \quad (13)$$

Vidíme, že skalár  $a$  (realisticky) pokládáme za stálý, ale že velikosti sil  $A_1$  a  $A_2$  jsou úměrné délce příslušných fazet (měřeno opět v příčném řezu).

Zapíšeme-li součtové podmínky rovnováhy ve vodorovném a svislém směru, dostaneme

$$\begin{aligned} N_1 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \varepsilon_1)\right] - A_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \\ N_2 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\beta - \varepsilon_2)\right] + A_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$



a

$$N_1 \cdot \cos(\alpha - \varepsilon_1) + A_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + N_2 \cdot \cos(\beta - \varepsilon_2) + A_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = P. \quad (15)$$

Odsud po dosazeních z (13) a (delších) úpravách odvodíme

$$N_1 = \frac{(P - 2 \cdot a \cdot h)}{\cos(\alpha - \varepsilon_1) + \cos(\beta - \varepsilon_2) \cdot \frac{\sin(\alpha - \varepsilon_1)}{\sin(\beta - \varepsilon_2)}} + \frac{a \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)}{\sin(\alpha - \varepsilon_1) + \sin(\beta - \varepsilon_2) \cdot \frac{\cos(\alpha - \varepsilon_1)}{\cos(\beta - \varepsilon_2)}} \quad (16)$$

a

$$N_2 = \frac{(P - 2 \cdot a \cdot h)}{\cos(\beta - \varepsilon_2) + \cos(\alpha - \varepsilon_1) \cdot \frac{\sin(\beta - \varepsilon_2)}{\sin(\alpha - \varepsilon_1)}} - \frac{a \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)}{\sin(\beta - \varepsilon_2) + \sin(\alpha - \varepsilon_1) \cdot \frac{\cos(\beta - \varepsilon_2)}{\cos(\alpha - \varepsilon_1)}} \quad (17)$$

Při eventuelní absenci adheze  $a$  (ta je na rozdíl od absence tření ve skutečnosti možná resp. pravděpodobnější) ve vztazích (16) a (17) pak tyto přecházejí v

$$N_1 = \frac{P}{\cos(\alpha - \varepsilon_1) + \cos(\beta - \varepsilon_2) \cdot \frac{\sin(\alpha - \varepsilon_1)}{\sin(\beta - \varepsilon_2)}} \quad (16a)$$

a

$$N_2 = \frac{P}{\cos(\beta - \varepsilon_2) + \cos(\alpha - \varepsilon_1) \cdot \frac{\sin(\beta - \varepsilon_2)}{\sin(\alpha - \varepsilon_1)}}, \quad (17a)$$

takže zohledňují pouze vliv tření. A poněvadž přitom platí vztah (srovnej se vztahem (4))  $H = N_1 \cdot \sin(\alpha - \varepsilon_1) = N_2 \cdot \sin(\beta - \varepsilon_2)$ , vychází pro velikost příčné tahové síly

$$H = \frac{P}{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon_2)}}. \quad (18)$$

Podobně, při uvažování jak tření, tak i adheze, můžeme zapsat

$$H = N_1 \cdot \sin(\alpha - \varepsilon_1) - A_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = N_2 \cdot \sin(\beta - \varepsilon_2) - A_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Odsud po dosazení (13), (16) a (17) a jistých úpravách dostáváme obě ekvivalentní varianty pro výpočet velikosti příčné tahové síly, totiž

$$H = \frac{(P - 2 \cdot a \cdot h)}{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon_2)}} + a \cdot h \cdot \left[ \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}{1 + \frac{\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon_2)}{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon_1)}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \right], \quad (19)$$

resp.

$$H = \frac{(P - 2 \cdot a \cdot h)}{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon_1)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon_2)}} - a \cdot h \cdot \left[ \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}{1 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon_1)}{\operatorname{tg}(\beta - \varepsilon_2)}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \right]. \quad (19a)$$

Vzhledem k nejvyšší míře účinnosti břitu v obrázku 5 z hlediska jeho efektivy budeme dále předpokládat jeho geometrickou souměrnost (i symetrii ve fyzikálně mechanickém slova smyslu), viz též výše provedená analýza vedoucí ke vztahu (8) a obrázku 3. Podle toho uvažujeme  $\alpha = \beta = \frac{\pi - \gamma}{2}$  a  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ , takže konečně z (19) resp. (19a) vyplyne

$$H_{max.} = \frac{(P - 2 \cdot a \cdot h)}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2} - \varepsilon\right) - \frac{a \cdot h}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \gamma}{2}\right)}. \quad (20)$$

Vzorec (20) ukazuje (srovnej s (8)), že jak tření fazet břitu o řezaný materiál (vliv  $\varepsilon$ ), tak i adheze  $a$  podstatně snižují velikost příčného tahu při daném  $P$ , což je ostatně patrné i z (19) resp. (19a). Tak jako lze např. odvodit výraz (4) resp. (18) z (19) i (19a), můžeme i vztah (8) snadno odvodit přímo z (20). V tomto smyslu pokládáme výsledky (19) resp. (19a) a (20) za relativně nejobecnější, pokud jde o obsah této studie.

Zbývá si ještě povšimnout oboustranného sousého tlakového řezání na způsob fungování štípacích kleští, a to při uvažování (jednotné) adheze  $a$  i tření fazet (úhly  $^1\varepsilon$  pro horní břit a  $^2\varepsilon$  pro dolní břit). Jak bylo vysvětleno výše, zdáme geometrickou symetrii obou penetrujících klínů, takže  $\alpha_i = \frac{\pi - \gamma_i}{2} = \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Tuto situaci ilustruje obrázek 6. (porovnej též s obrázkem 4.). Povšimněme si, že oba uvedené obrázky předpokládají současné nenulové penetrace obou břitů, nebo-li  $h_1 \neq h_2 > 0$ . Jinak řečeno, situace na obrázku č. 2 resp. na obrázku č. 5 není limitní situací k oné, která je zobrazena na obrázku č. 4. resp. na obrázku č. 6. Nyní, ze statické podmínky rovnováhy v horizontálním směru (viz obrázek 6) po úpravách odvodíme

$$N_2 = \frac{N_1 \cdot \sin(\alpha_1 - 1\varepsilon) + {}^2A \cdot \cos\alpha_2 - {}^1A \cdot \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - 2\varepsilon)}$$

a ze statické podmínky ve vertikálním směru dostaneme

$$P = {}^1A \cdot \sin\alpha_1 + N_1 \cdot \cos(\alpha_1 - 1\varepsilon) + {}^2A \cdot \sin\alpha_2 + N_2 \cdot \cos(\alpha_2 - 2\varepsilon).$$

Vzhledem k tomu, že platí  ${}^iA = a \cdot h_i \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\alpha_i}{\sin^2\alpha_i} + 1}$ ,  $i = 1, 2$ , takže  ${}^iA \cdot \sin\alpha_i = a \cdot h_i$ , máme z posledních dvou rovnovážných rovnic (po úpravách)

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{P - a \cdot (h_1 + h_2)}{\cos(\alpha_1 - 1\varepsilon) + \cos(\alpha_2 - 2\varepsilon) \cdot \frac{\sin(\alpha_1 - 1\varepsilon)}{\sin(\alpha_2 - 2\varepsilon)}} + \\ & + \frac{a \cdot (h_1 \cdot \cos\alpha_1 - h_2 \cdot \cos\alpha_2)}{\sin(\alpha_1 - 1\varepsilon) + \sin(\alpha_2 - 2\varepsilon) \cdot \frac{\cos(\alpha_1 - 1\varepsilon)}{\cos(\alpha_2 - 2\varepsilon)}} \end{aligned} \quad (21)$$

a

$$\begin{aligned} N_2 = & \frac{P - a \cdot (h_1 + h_2)}{\cos(\alpha_2 - 2\varepsilon) + \cos(\alpha_1 - 1\varepsilon) \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - 2\varepsilon)}{\sin(\alpha_1 - 1\varepsilon)}} - \\ & - \frac{a \cdot (h_1 \cdot \cos\alpha_1 - h_2 \cdot \cos\alpha_2)}{\sin(\alpha_2 - 2\varepsilon) + \sin(\alpha_1 - 1\varepsilon) \cdot \frac{\cos(\alpha_2 - 2\varepsilon)}{\cos(\alpha_1 - 1\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

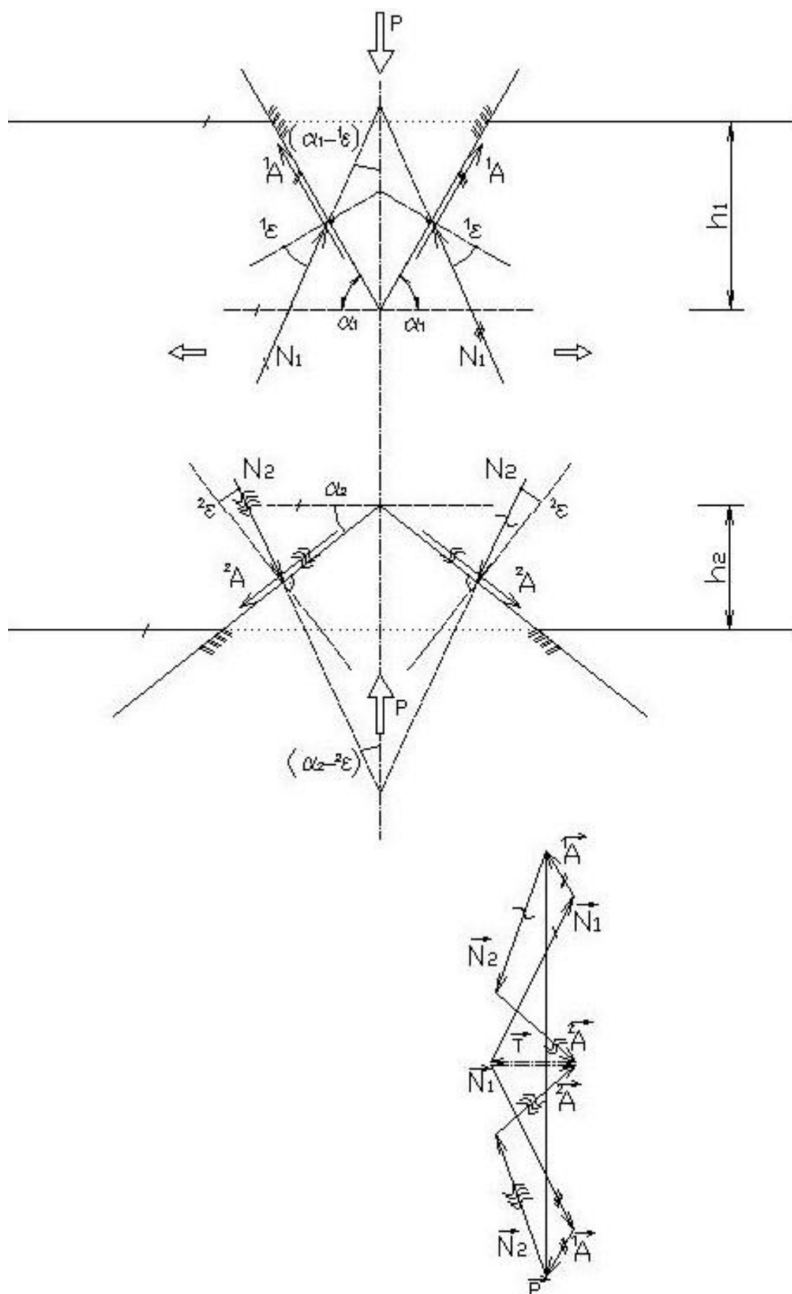
Pro velikost příčného tahu za sousosého štípání podle vektorového schématu v obrázku č. 6 lze nyní již zapsat rovnici

$$T = N_1 \cdot \sin(\alpha_1 - 1\varepsilon) - {}^1A \cdot \cos\alpha_1 + N_2 \cdot \sin(\alpha_2 - 2\varepsilon) - {}^2A \cdot \cos\alpha_2.$$

Z posledního vztahu po dosazeních a úpravách konečně získáme

$$\begin{aligned} T = & \frac{2 \cdot [P - a \cdot (h_1 + h_2)]}{\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - 1\varepsilon)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_2 - 2\varepsilon)}} - \\ & - a \cdot \left\{ h_1 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1} - \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - 1\varepsilon) - \operatorname{tg}(\alpha_2 - 2\varepsilon)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - 1\varepsilon) + \operatorname{tg}(\alpha_2 - 2\varepsilon)} \right] + \right. \\ & \left. + h_2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - 1\varepsilon) - \operatorname{tg}(\alpha_2 - 2\varepsilon)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - 1\varepsilon) + \operatorname{tg}(\alpha_2 - 2\varepsilon)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Obrázek 6: Schéma tlakového řezání sousými symetrickými klíny za přítomnosti tření i adheze



Zdroj: vlastní

Diskuse posledního vzorce ukazuje, že při nulové adhezi i absenci tření přechází vzorec (23) ve vztah

$$T = \frac{2 \cdot P}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}}. \quad 23a$$

Bude-li navíc platit  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \beta = \frac{\pi - \gamma}{2}$  (úplná břitová symetrie), přechází (23a) v (10). Zpravidla lze s ohledem na účinnost řezu skutečně předpokládat  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \beta = \frac{\pi - \gamma}{2}$ , realisticky očekávat  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  (jednotná jakost povrchu fazet) a  $a \geq 0$ . Tehdy je možno i uvažovat, že  $h_1 = h_2 = h$ , takže vztah (23) přechází v

$$T = (P - 2 \cdot a \cdot h) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \gamma}{2} - \varepsilon \right) - \frac{2 \cdot a \cdot h}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \gamma}{2} \right)}, \quad (24)$$

srovnaj se vzorcem (20).

## Závěrečné úvahy a diskuse výsledků

Předložená práce se zabývala analýzou tlakového řezání za jednobřítových (i dvojbřítových) okolností s tím, že předpokládala tření i adhezi mezi čepelí (čepelemi) a řezaným materiálem. Opírala se přitom o klasickou mechaniku, aniž by zabíhala do fyziky mikrostrukturovaných látek. Prokázala, že na destrukci řezaného materiálu se rozhodujícím způsobem podílí tzv. příčný tah, který byl kvantifikován pro různé situace. Musela se samozřejmě opřít o některé shora zavedené předpoklady, které umožňovaly dobrat se konkrétních a „dobře přijatelných“ výsledků. Ty jsou ve shodě se zkušenostmi praktiků i s fyzikálním názorem.

Zdá-li se, že pozice tlačné síly  $\vec{P}$  (ve skutečnosti někde v okolí středu šíře břitu) není až natolik významná, jeví se polohy reakčních sil  $\vec{N}_i$  (do fazet břitu) přeci jen významnějšími. V této studii bylo (intuitivně) předpokládáno, že pa-prsky sil  $\vec{N}_i$  procházejí středy fazet, což je ale třeba chápat spíše hypoteticky, poněvadž kontaktní fazetová normálová napětí  $^I\sigma$ ,  $^{II}\sigma$  (apod.) budou stěží konstantní. Nicméně, budeme-li předpokládat, že se jejich průběhy napříč fazetami nebudou vyvíjet „nikterak dramaticky“, lze pokládat polohy sil  $\vec{N}_i$  za rámcově správné resp. „přijatelné“.

Dále je třeba upozornit, že velikosti příčných tahů za jednobřítových tlakových řezů (síly  $\vec{H}$  resp.  $\vec{H}_{max}$ . v rovnicích (7), (8), (19), (19a) a (20)) budou ve skutečnosti menší než výše odvozeno. Tato skutečnost je způsobena nutnou přítomností kontaktního normálového napětí pod řezanou vodorovnou deskou v okolí působíště akční řezací síly velikosti  $P$  (viz též zmínka na začátku druhé kapitoly). Právě toto napětí (ovšem naintegrováno ze zmíněného okolí do určité síly působící vertikálně (a kolineárně) proti vektoru  $\vec{P}$ ) primárně zmenší původní velikost  $P$ , takže musí potažmo dojít i ke zmenšení velikosti příčných



tahů (ale i přibytí „přidatných napětí“ od ohybu desky). Tuto okolnost by bylo možno s určitou „mírou přesnosti“ i kvantifikovat, ovšem za předpokladu, že jsou známy průběhy předmětných napětí pod deskou, což by znamenalo řešit kontaktní úlohu „pružné podepřené horizontální desky zatížené liniovou svíslou tlakovou silou  $\vec{P}$ “ – např. winklerovsky. Odhady podobného druhu by však již značně přesahovaly rozumný rozsah tohoto příspěvku. Podobně, jakákoliv neostrost penetrujícího břitu také nutně umenšuje velikost  $P$ , a tedy i příčný tah. Podle autorových zkušeností mohou být předmětné ztráty na velikosti tlakové síly  $\vec{P}$  i velmi značné. Za dvojbřitého tlakového řezání lze však odvozené výsledky pro příčné tahy  $\vec{T}$  (především vzorce (9), (10), (23) a (24)) pokládat za „dobře přijatelné“ (výstižné).

Existuje však ještě jeden jev, který může ovlivnit odvozené výsledky, a to tak, že se velikosti příčných tahů mohou více či méně zmenšit bez ohledu na to, jde-li o jednobřítový řez či o dvojbřítové štípání. Tímto fenoménem se může ukázat pružné horizontální svírání čepele, která proniká materiálem. Tuto elastickou okolnost předkládaná studie fyzikálně neanalyzuje; snad by se nechala (v intencích tohoto příspěvku ovšem pouze numericky) vystihnout prostřednictvím určitého zvětšení adheze  $a$  či jistým navýšením třecího účinku (úhlů  $\varepsilon_i$  resp.  $^i\varepsilon$ ,  $i = 1, 2$ ).

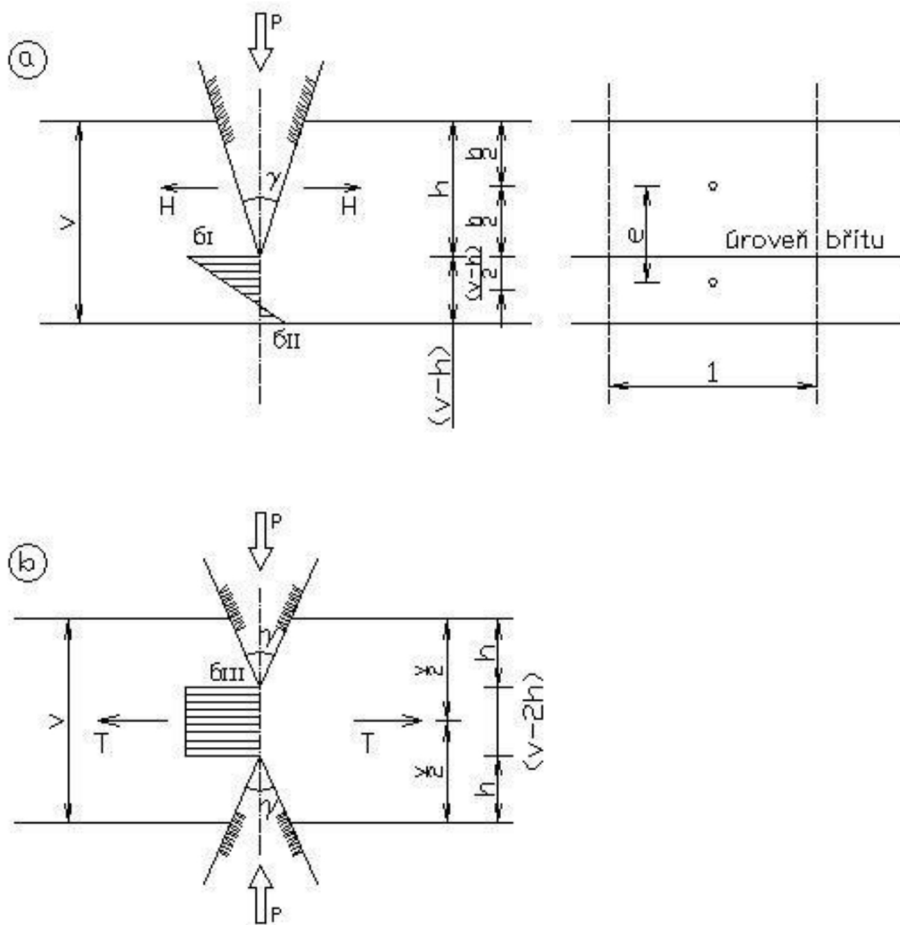
Přístupme konečně k odhadu napjatosti v řezu pod břitem (břity). Jak už bylo řečeno, tlakovým řezem kontrahovaný materiál je nejprve „načat“ obrovským normálovým napětím v uvažované desce pod břitem (soustředěný liniový tlak); proto je ostatně požadována dokonalá ostrost a co nejvyšší míra tvrdosti vlastního ostří. Následně dochází k břítové penetraci indukující v důsledku vzniknuvšího vrubu příčné tahy, ale i – zejména za jednobřítového tlakového řezání – k podružnému ohybu desky, přičemž velice záleží na způsobu plošného podepření desky v okolí působnosti tlakové síly  $\vec{P}$ . Tato situace v kontrahovaném průřezu vede ke značným tahům příčným i tahům za ohybu, menším tlakům za ohybu a k zpravidla zanedbatelnému smyku za ohybu. Avšak v důsledku břítového vrubu v něm dochází ke koncentraci napětí (jde o matematicky poměrně obtížně vystihnutelné „zahuštění“ silokřivek hlavních napětí s devastujícími účinky pro materiál) a k následné destrukci („přetržení“) desky. Na obrázku č. 7 – i bez úvah kolem přidatných napětí od ohybu desky a bez přihlídnutí k intenzifikaci napětí od vrubového namáhání – jsou ukázány podstatné napjatostní okolnosti při tlakovém řezání vodorovné desky, i když jen „přibližnými“ prostředky technické pružnosti. V té části obrázku 7, která je věnována jednobřítovému řezání, je třeba, jak vysvětleno, počítat s umenšenou silou  $\mu \cdot \vec{P}$ ,  $0 < \mu < 1$  a brát tedy (např. podle (8) resp. (20)) namísto  $H_{max}$ . jen velikost  $\mu \cdot H_{max}$ . Namáhaný průřez  $1 \cdot (v - h)$  (deska má tloušťku  $v$  a jednotkovou šířku) je vystaven tahové síle velikosti  $H = \mu \cdot H_{max}$ . na rameni  $e = \frac{v}{2} = konst.$  Od ohybového momentu  $M = H \cdot \frac{v}{2}$  odvodíme normálová

napětí  $\sigma_1 = \pm \frac{M}{\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (v - h)^2} = \pm \frac{3 \cdot H \cdot v}{(v - h)^2}$  (tah) a od příčné tahové síly  $\vec{H}$  pak

vyplyne normálové napětí  $\sigma_2 = + \frac{H}{1 \cdot (v - h)}$  (tah). Superpozicí těchto napětí

konečně dostaneme  $\sigma_I = + \frac{(4 \cdot v - h)}{(v - h)^2} \cdot H$  (tah) a  $\sigma_{II} = - \frac{(2 \cdot v + h)}{(v - h)^2} \cdot H$  (tlak), viz obrázek č. 7.

Obrázek 7: Napjatostní situace za tlakového souměrného jedno a dvoubřitového řezání desky



Zdroj: vlastní

Pro zajímavost uvedme, že  $\frac{|\sigma_I|}{|\sigma_{II}|} = \frac{(4 \cdot v - h)}{(2 \cdot v + h)} \in (1; 2)$  pro  $h \in (v; 0)$ . Rovněž je vidět, že se vzrůstem penetrace  $h$  rostou i průřezová napětí  $|\sigma_I|$  a  $|\sigma_{II}|$ , přičemž pro  $h \rightarrow v$  je i  $|\sigma_I| = |\sigma_{II}| \rightarrow +\infty$ . V případě symetrického dvoubřitového řezu podle dolní poloviny obrázku 7 lze počítat s plnou velikostí síly  $\vec{P}$ , a tedy brát celý příčný tah  $\vec{T}$  podle (10) resp. (24). Pověšměme si, že vzhledem ke vztahu

(10) je  $\frac{T}{H_{max.}} \approx \frac{2}{\mu}$ , přičemž přibližně stejný výsledek lze očekávat i vzhledem ke vztahu (24), a tak kontrahovaný průřez  $1 \cdot (v - 2 \cdot h)$  bude namáhán pouze tahovým napětím  $\sigma_{III} = \frac{T}{1 \cdot (v - 2 \cdot h)}$ . Je sice evidentní, že  $\sigma_{III} > \sigma_2$ ,

(orientačně je  $\frac{\sigma_{III}}{\sigma_2} \approx \frac{2 \cdot (v - h)}{\mu \cdot (v - 2 \cdot h)} > 1$ ), nicméně analogicky vychází (také

pouze orientačně)  $\frac{\sigma_{III}}{\sigma_I} \approx \frac{2}{\mu} \cdot \frac{(v - h)^2}{(4 \cdot v^2 - 9 \cdot h \cdot v + 2 \cdot h^2)}$ , přičemž zde přirozeně

žádáme  $h \in \left(0; \frac{h}{2}\right)$ . Prozkoumáme-li tento poměr, zjistíme, že je kladný a (podle očekávání) může být skutečně větší než 1, což záleží (více) na koeficientu  $\mu$  a (méně) na poměru  $\frac{v}{h}$  pro reálné volby  $h$ . Tyto úvahy potvrzují, že zmenšující součinitel účinnosti  $\mu$  může klesnout i jen na několik pouhých desetin jednotky.

Zrekapitulujme závěrem že napjatostní poměry za tlakového řezání se spjitě mění s hloubkou penetrace a že **nejúčinnějších pracovních výsledků lze docílit pomocí oboustranných a souměrných fazetových břitů s (materiálově technologicky únosnými) co nejmenšími břitovými úhly, které jsou co nejtvrdší, dokonale nabroušeny i vyleštěny a při absenci resp. minimalizaci adheze**. Lze rovněž konstatovat, že **oboustranné tlakové řezání navzájem komplannými čepelemi je výrazně účinnější než řezání jednostranné**.

Předložená studie se zabývala jen některými aspekty při tlakovém řezání za relativně nejjednodušších fyzikálně geometrických okolností. Výsledky analýzy berou nicméně v úvahu ta nejdůležitější fyzikální hlediska a potvrzují (i vysvětlují a kvantifikují) zkušenosti z technické praxe. Není pochyb, že k obdobným závěrům bychom se dobrali i v případě jiného geometrického uspořádání tlakových řezů. Práce může posloužit i jako jakýsi návod k analýze analogických (a komplikovanějších) fyzikálně technických problémů.

## Použité zdroje

DUCHÁČEK, J. *Nauka o pružnosti a pevnosti*. Praha: SNTL, 1964.

DUCHÁČEK, J. et al *Statika stavebních konstrukcí* Praha: SNTL/SVTL, 1967.

NOVOTNÁ, H., S. CAIS a M. PTÁČEK. *Teoretická mechanika* Praha: SNTL/ALFA, 1983.

SZABÓ, I. *Mechanika tuhých těles a kapalin*. Praha: SNTL, 1967.

ŠREJTR, J. *Technická mechanika I. Statika* Praha: SNTL, 1957.

ŠTAJNOCHR, L. *Broušení nástrojů 2.*, přeprac. vyd. Praha: Grada, 2004. ISBN 80-247-0742-X.

## Some aspects of pressure cutting of materials

Technology of cutting — especially effectiveness of disintegration of matter in terms of speed, accuracy and energy intensity (modesty) of its cut — belong not only between the oldest historical manifestations of the applications of techniques in practice, but it's also the most important activity of most of the proces in industrial world. This document will focus on clarification, analyzing and discussing of some aspects of pressure cutting of materials.

**Keywords:** pressure cutting, wedge effect, transverse tension, penetration into the solid material, stress on the weakened section profil

### **Kontaktní adresa:**

prof. Ing. Radimír Novotný, DrSc., Katedra techniky a aplikovaných věd, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 10, 370 01 České Budějovice, e-mail: [novotny@mail.vstecb.cz](mailto:novotny@mail.vstecb.cz)

---

NOVOTNÝ, R. Některé aspekty při tlakovém řezání materiálů. *Littera Scripta*. 2011, 4(2), 215–234. ISSN 1802-503X.

---