Teorie iterací a monounární algebry ve vysokoškolské matematice

Helena Binterová, Pavel Tlustý
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Abstrakt

V tomto článku jsme se soustředili na demonstraci možnosti využití teorie iterací v teorii monounárních algeber, zabývali jsme se konkrétně dvouparametrickým systémem kvadratických funkcí $f(x,t,s) = f(x+t)^2 + s$, mimo jiné z důvodu důležitosti kvadratických funkcí v matematice jak na střední, tak vysoké škole a významu jednoduchých nelineárních modelů. Popisujeme zde rozklad tohoto systému na bloky navzájem konjugovaných funkcí tak, abychom ukázali možnosti využití teorie iterací z hlediska moderní matematiky na vysokých školách.

Klíčová slova: teorie iteraci, monounární algebry kvadratická funkce

Úvod

V letech 1815–1816 jeden z matematiků 19. století, Charles Babbage – matematik, ekonom, politik a filosof, jehož význam bývá často redukován pouze na oblast výpočetní techniky a jehož skutečný význam spočívá v celé jeho rozsáhlé práci matematické, ekonomické i filosofické, publikoval dvoudílnou práci *An Essay Towards the Calculus of Functions*, ve které zkoumal a klasifikoval možnosti řešení funkcionálních rovnic. Hlavním výsledkem studia funkcionálních rovnic pak bylo položení základů teorie iterací. V návaznosti na výsledky Charlese Babbage v tomto článku ukážeme, jak je možné využít teorii iterací ve vyučování matematice a přineseme netradiční pohled na kvadratické funkce z pohledu monounárních algeber. Základní pojmy teorie monounárních algeber nalezneme například v publikaci Chvaliny (1995) a v článcích Beránka, Chvaliny (2002), Bijeva, Tomodorova (1985) nebo Binterové (2003b). Tato teorie představuje užitečný matematický aparát pro studium vlastností množinových transformací. Je využívána v mnoha oborech moderní matematiky. S pojmy, které zde budeme používat, pracujeme pouze na intuitivní úrovni tak, abychom přiblížili popisovanou tématiku, s cílem motivovat studenty k dalšímu studiu zajímavých oblastí matematiky. Jak uvádí Krech (2006), je důležité ve výuce matematiky nezanedbat fázi matematizace a proces aplikace poznatků.

Uzlové grafy

Funkcionální rovnice jsou předmětem zájmu mnoha matematiků na celém světě. Pokud hledáme například řešení Abelovy rovnice $f(s(x)) = f(x) + c$, kde f je neznámá funkce a s je funkce daná, utvoříme množinu, kterou pojmenujeme orbita, a tato množina má tu vlastnost, že známe-li hodnotu hledané funkce v jednom bodě orbity, najdeme iterativními procesy hodnotu ve všech bodech téže orbity. Jinými slovy, každý bod orbity je „dosažitelný“ z počátečního bodu x_0 užitím funkce s. Tedy například, když body x_1, x_2 leží na orbitě, platí $x_1 = s^{i(x_0)}$ a $x_2 = s^{j(x_0)}$, kde i, j jsou vhodná celá čísla, ve smyslu $s^1 = s$, $s^2 = s \circ s$, s^{-1} je inverzní funkce, $s^{-2} = s^{-1} \circ s^{-1}$ atd. Tím je popsáno, že každé dva body orbity jsou navzájem dosažitelné konečným užitím funkcí s a s^{-1}. Pokud pak uvažujeme všechny orbity všech bodů definičního intervalu funkce f, pak množina těchto orbit tvoří rozklad na množině bodů tohoto intervalu. Definici orbity uvádíme dále.

V iterační teorii funkcí jsou obvykle elementární funkce popisovány jako algebry s jednou unární operací. Příslušnou monounární algebru budeme nazývat *unarem.* Pro popsání unaru můžeme volit alternativní popisy. Lze je např. považovat za množinu s jednou binární relací nebo je chápat jako orientované grafy (Chvalina 1995).

Definice 1. Unar (A, f) se nazývá souvislý, jestliže pro každé dva prvky $a, b \in A$ existuje dvojice přirozených čísel $m, n \in N_0$ s vlastností $f^n(a) = f^m(b)$. V opačném případě se unar nazývá nesouvislý.

Definice 2. Unar (B, g) nazveme podunarem unaru (A, f), jestliže $\emptyset \neq B \subseteq A$ a zobrazení g je zúžením zobrazení f na množinu B.

Definice 3. Maximální souvislý podunar ve smyslu uvedené relace se nazývá komponenta unaru (A, f).

Souvislý unar je tvořený jedinou komponentou.

Definice 4. Minimální podunar (pokud existuje) dané komponenty se nazývá cyklus. Cyklus řádu $k > 0$, krátce k-cyklus zobrazení $f : A \to A$ je množina $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ prvků množiny A, pro které platí $f(x_m) = x_{m+1}$ pro $0 \leq m < k - 1$ a $f(x_{k-1}) = x_0$. Komponenta se nazývá cyklická nebo acyklická podle toho, zda obsahuje nebo neobsahuje cyklus.

Každá komponenta unaru zřejmě obsahuje nejvýše jeden cyklus. Nosiče komponent unaru (A, f) se nazývají orbity funkce f. Každá konečná orbita je cyklická. V dalším textu bude hrát klíčovou roli pojem konjugace funkcí, uvedeme proto definici tohoto pojmu.

Nechť (A, f), (B, g) jsou funkcionální grafy, $h : (A, f) \to (B, g)$ je homomorfismus. $h : A \to B$ je, z hlediska obecných algeber, homomorfismus unaru (A, f) do (B, g).

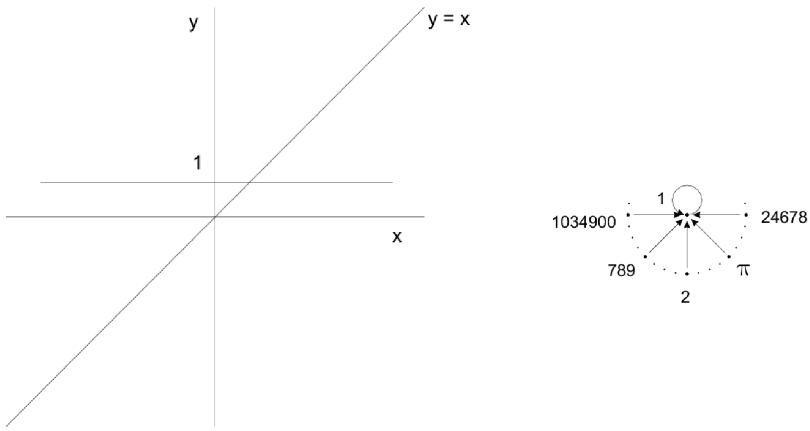
Definice 5. Nechť (A, f), (B, g) jsou unary. Funkce f, g se nazývají konjugované, když existuje bijekce $h : A \to B$ taková, že $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Ukážeme nyní, jak vypadají uzlové grafy pro různé typy funkcí. Grafy nebo také orbity, kterými je můžeme popsat podobně jako kartézským grafem, mohou vypadat rozdílně a dokonce i někdy neočekávaně nezvykle. Při vyšetřování tvaru těchto orbit je nutné znát důkladně vlastnosti těchto funkcí a provést úplný rozbor jejich vlastností. Pro demonstraci různých typů orbit jsme vybrali dva typy funkcí: konstantní funkci, funkci lineární. U každé z nich předvedeme její kartézský graf, typy orbit a provedeme rozbor z hlediska počtu všech typů uzlových grafů, které danou funkci reprezentují.

Příklady některých funkcí a jejich orbit

Jako první vezměme příklad konstantní funkce $y = 1$. Je zřejmé, že všechny počáteční body hran proběhnou množinu všech reálných čísel. Koncový uzel všech orientovaných hran je jediný, konstanta c. Tato konstanta se zároveň zobrazí sama na sebe, což na uzlovém grafu znázorňujeme smyčkou. Jedná se o konečnou cyklickou orbitu.

Obrázek 1: Konstantní funkce



Zdroj: vlastní

Na obrázku 1 je znázorněn kartézský graf a jediná orbita, která tuto funkci reprezentuje.

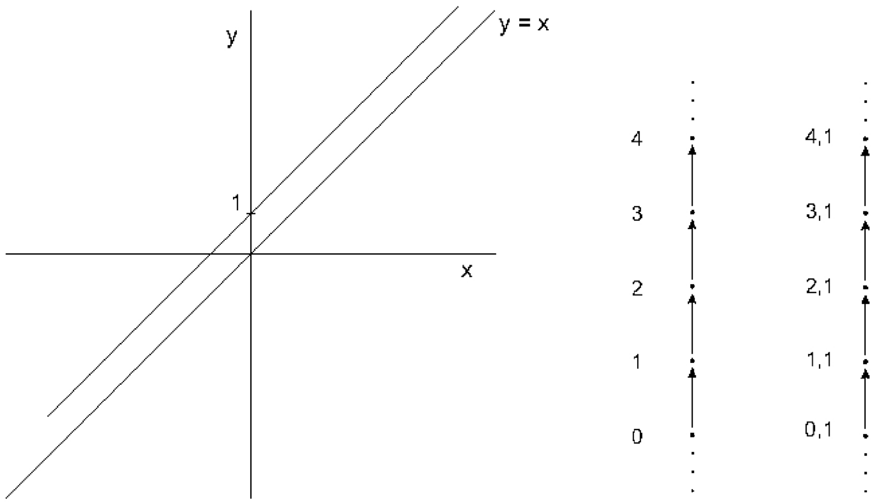
Dále budeme zkoumat lineární funkci $y = x + 1$. Chceme tedy zjistit, jak budou vypadat její orbity. Takových orbit je nespočetně mnoho, jsou nekonečné, acyklické a všechny procházejí hodnotami v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Na obrázku 2 jsou znázorněny dvě takové nekonečné orbity.

Je zřejmé, že orbity funkce $y = x$ jsou úplně jiné. Jsou to cyklické grafy, smyčky ve všech bodech přímky, neboť každý její bod se zobrazuje sám na sebe.

Zatím jsme zjistili, že orbita jedné lineární funkce $y = c$ je jedna konečná a cyklická, orbit jiné lineární funkce $y = x$ je nespočetně mnoho a jsou všechny cyklické. Pokud tuto funkci posuneme o jistý parametr, situace se změní, její orbity jsou nekonečné, acyklické a je jich také nekonečně mnoho. Porovnáme-li kartézské grafy těchto funkcí, grafem všech těchto funkcí je přímka, liší se pouze polohou vzhledem k ose x.

Obrázek 2: Lineární funkce



Zdroj: vlastní

Dvouparametrický systém kvadratických funkcí

Naznačili jsme, jak různé mohou být tvary orbit jednotlivých funkcí, jak obtížný někdy může být jejich popis a nalezení všech typů. Pokud bychom chtěli popsat orbity například kvadratických funkcí, brzy zjistíme, že jejich popis vůbec není jednoduchý.

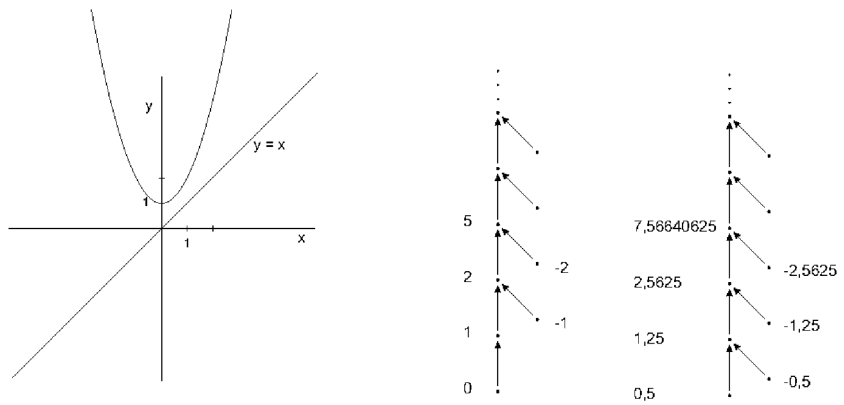
Abychom přiblížili celou problematiku, její obsáhlost a složitost, pokusíme se dále přinést rozbor problematiky typů orbit kvadratické funkce ve tvaru $y = x^2 + c$ chápaných jako monounární algebry. Čtenář bude moci sám nahlédnout, jak obtížný by byl popis dalších typů kvadratických funkcí. V návaznosti na popisy vybraných funkcí popíšeme rozklad systému kvadratických funkcí na bloky funkcí navzájem konjugovaných, zavedeme základní pojmy týkající se tohoto rozkladu. Popíšeme jednotlivé tvary orbit a uvedeme jejich grafickou reprezentaci.

Zabývejme se tedy nyní dvouparametrickým systémem τ kvadratických funkcí $f(x, t, s) = (x + t)^2 + s$. Uvažme rozklad tohoto systému na bloky navzájem konjugovaných funkcí. Při popisu tohoto rozkladu hrají významnou roli průsečíky dané kvadratické funkce $f(x, t, s)$ s identitou $g(x) = s$. Hledejme průsečík funkce $f(x, t, s)$ s lineární funkcí $g(x)$, tj. řešme rovnici $x = x^2 + 2tx + t^2 + s$.

Pro kořeny poslední rovnice platí $x_{1,2} = \dfrac{1 - 2t \pm \sqrt{4t^2 - 4t + 1 - 4t^2 - 4s}}{2} = \dfrac{1 - 2t \pm \sqrt{-4t - 4s + 1}}{2}$. Odtud plyne, že v případě $s + t > \dfrac{1}{4}$ nemá uvedená rovnice žádné řešení, pro $s + t = \dfrac{1}{4}$ má jediné řešení a pro $s + t < \dfrac{1}{4}$ má dvě řešení. Bloky studovaného rozkladu, tj. bloky navzájem konjugovaných funkcí, nelze určit jen pomocí počtu průsečíků kvadratických funkcí s identitou. Jak jsme však již uvedli, jsou dvě funkce konjugované právě tehdy, když jsou izomorfní uzlové grafy příslušných unarů. Popišme tedy podrobněji, jak vypadají některé uzlové grafy studovaných unarů.

Uvažme například funkci $y = x^2 + 1$. Na obr. 3 je její kartézský graf, vpravo jsou uvedeny dva typy orbit, na něž se rozpadá uzlový graf daného unaru.

Obrázek 3: Kartézský graf a orbity funkce $y = x^2 + 1$



Zdroj: vlastní

Protože funkce $y = x^2 + 1$ nabývá hodnoty 1 pouze v bodě 0, existuje jediná orbita, která má nejmenší prvek (obr. 3, levá orbita). Všechny ostatní orbity mají minimální prvky α a $-\alpha$, kde $\alpha \in (0, 1)$. Uzlový graf funkce z tak obsahuje $2^{\aleph_0}$ komponent tvaru, který je znázorněn na obr. 3 vpravo (uvedena je orbita pro $\alpha = \frac{1}{2}$).

Pro popisy bloků konjugovaných kvadratických funkcí daného systému je zásadní následující tvrzení.

Věta 1. Funkce $f(x, t_1, s_1)$, $f(x, t_2, s_2)$ takové, že $t_1 + s_1 = t_2 + s_2$ jsou konjugované.

Důkaz věty je jednoduchý. Vzhledem k tomu, že jedna funkce vznikne z druhé posunutím ve směru identity $g(x) = x$, jsou dané uzlové grafy evidentně izomorfní. Dané funkce jsou konjugované.

Důsledek 1. Podle věty 1 je možné v dalších úvahách reprezentovat všechny paraboly $f(x, t, s)$, pro něž $t + s$ je rovno dané konstantě $c \in R$, parabolou $y = x^2 + c$.

Věta 2. Buď (R, q) unar na množině R. Definujme na R binární relaci $\leq$ takto: pro $x, y \in R$ položíme $x \leq y$, jestliže existuje $n \in N_0$ s vlastností $q^n(x) = y$. Pak je $\leq$ kvaziuspořádání (tj. reflexivní a tranzitivní relace) na množině R. Tato relace je navíc antisymetrická, tj. bude uspořádáním právě tehdy, když orbity daného unaru obsahují nejvýše jednoprvkové „cykly“, tj. smyčky.

Důkaz: Reflexivita a tranzitivita definované relace je zřejmá. Existuje-li v unaru (R, q) cyklus délky $k > 0$, existují podle definice 4 (Binterová 2003a) v R takové prvky $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$, že $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{k-1} \leq x_0$, takže relace $\leq$ není antisymetrická. Smyčky však antisymetrii evidentně neporušují. Tím je tvrzení dokázáno.

Nyní již můžeme popsat jeden blok rozkladu navzájem konjugovaných funkcí studovaného systému t.

Věta 3. Všechny funkce $f(x, t, s)$, kde $s+t = \frac{1}{4}$ jsou vzájemně konjugovány a tvoří jeden blok rozkladu.

Důkaz: Orbity unarů ze systému τ obecně obsahují cykly. V případě funkce $f(x, t, s)$, $s + t = \frac{1}{4}$ však příslušný unar neobsahuje žádný cyklus, takže orbity jsou uvedenou relací uspořádány. Uzlový graf libovolné funkce $y = x^2 + c$, $c > \frac{1}{4}$ je izomorfní s grafem na obrázku 3. Současně platí, že v uzlovém grafu každé funkce $f(x, t, s)$, kde $s + t \leq \frac{1}{4}$ leží alespoň jeden pevný bod (průsečík kvadratické funkce s identitou), tj. bod, v němž je smyčka. Uzlový graf takové funkce tedy nemůže být izomorfní s grafy funkcí $f(x, t, s)$, $s+t > \frac{1}{4}$, takže podle věty 1 nemůže být žádná z těchto funkcí konjugována s některou z funkcí, která identitu neprotíná. Tím je věta dokázána.

Kvadratická funkce

Další bloky studovaného rozkladu nelze takto snadno popsat. Neplatí totiž, že každé dvě funkce ze systému τ, které protínají identitu například ve dvou bodech, jsou konjugované. Bloky rozkladu jsou v tomto případě podstatně komplikovanější. Uvědomme si, jak mocným nástrojem při studiu konjugovaných funkcí jsou uzlové grafy získané pomocí iterací dané funkce. Kdybychom chtěli přímo podle příslušné definice zjistit, zda jsou dvě funkce $f_1 = f(x, t_1, s_1)$, $f_2 = x, t_2, s_2$ ze systému τ konjugované, museli bychom dokázat existenci bijekce $h : R \to R$ takové, že $f_1 = h^{-1} \circ f_2 \circ h$ tj. $h \circ f_1 = f_2 \circ h$.

Studium tohoto problému vede ke zkoumání netriviálních funkcionálních rovnic. Dokonce i jednodušší problém než řešení poslední rovnice, totiž otázka záměnnosti bijekce $h : R \to R$ s kvadratickou funkcí $\varphi = (x + t)^2 + s$, tj. platnost vztahu $f(\varphi(x)) = \varphi(f(x))$ vede k funkcionální rovnici $f((x+t)^2+s) = (f(x) + t)^2 + s$, $[f(x)]^2 + 2tf(x) + t^2 - f((x + t)^2 + s) + s = 0$. Netriviální otázka řešitelnosti takové funkcionální rovnice je však pro kvadratické funkce ze systému t, pro něž platí $s + t > \frac{1}{4}$, větou 3 zodpovězena kladně (Binterová, Chvalina, Chvalinová 2004; Binterová 2003a).

V závěru přesto nyní, pro názornost, ukážeme dva typy orbit kvadratické funkce $y = x^2 + c$, kde $c \in R$, tedy uzlových grafů jednotlivých unarů. Podle předchozích závěrů bude důležitou hodnotou při tomto popisu hodnota konstanty c.

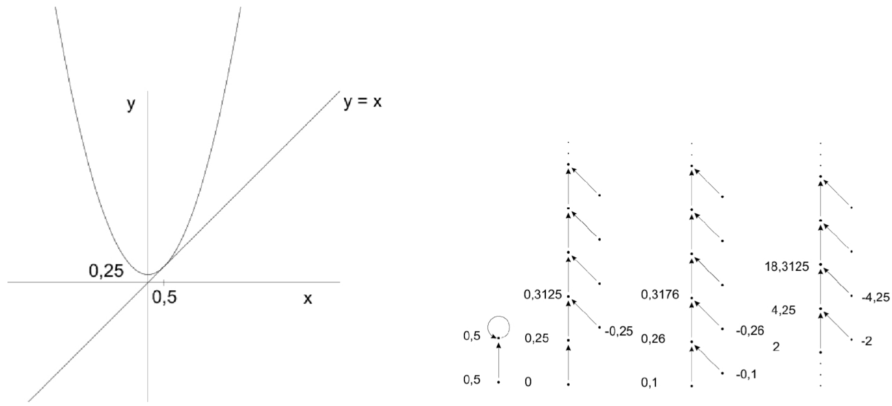
Ukázka 1: konstanta $c > \frac{1}{4}$

Zvolme $x = 1$. Funkci $y = x^2 + 1$ jsme již popisovali v úvodní části kapitoly, viz obr. 3. Připomeňme si, tento uzlový graf daného unaru se rozpadá na dva typy konečných acyklických orbit, jeden řetězec na obr. 3 vyrůstající z nuly a nespočetně mnoho řetězců (na obrázku vpravo), vyrůstajících z intervalu $(0, c)$, v tomto případě $(0, 1)$.

Ukázka 2: konstanta $c = \frac{1}{4}$

Situace se změní, pokud budeme pozorovat chování iterací funkce $y = x^2 + \frac{1}{4}$. Uzlový graf příslušného unaru tvoří jedna cyklická orbita v bodě dotyku paraboly s identitou (obr. 4), čili v bodě $\frac{1}{2}$ (první orbita zleva). Protože se jedná o sudou funkci, zobrazuje se na tuto hodnotu také $-\frac{1}{2}$.

Obrázek 4: Kartézský graf a orbity funkce



Zdroj: vlastní

Dále z nuly vyrůstá jediná orbita (na obrázku 4 druhá zleva), která je acyklická a nekonečná. Nespočetně mnoho orbit vyrůstá z hodnot intervalu $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (třetí orbita zleva). Poslední typ orbit (na obrázku 4 vpravo) jsou nekonečné, acyklické orbity, je jich nespočetně mnoho a vyrůstají z hodnot intervalu $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Dále bychom mohli popsat orbity pro případ konstanta $0 < c < \frac{1}{4}$ a $c = 0$. Graf první možnosti konstanty má dva průsečíky s identitou, vrchol paraboly není v nule, tedy jistě opět jedna orbita bude stejného typu jako v případu 2. Objeví se i jednocykly, smyčky. Dalším problematickým bodem, jak jsme již naznačili, je nula. Necháme na samotném čtenáři, aby se pokusil o detailní popis obou případů.

Pokud však konstanta c bude záporná, podstatně se mění situace. Bodů, ve kterých mohou nastat cykly, nebo které se chovají „podezřele“, je víc než v předchozích případech. Vrchol paraboly, dva průsečíky s osou x, dva průsečíky s identitou. Do této doby se jako typ orbity objevovaly nejvýše jednocykly, otázkou je, zda se objeví cykly délky dva a více. Odpověď však není jednoduchá a necháme ji proto otevřenou, jako možnost pokračování tohoto článku.

Závěr

Při úplném a vyčerpávajícím posouzení celého problému se tedy naskýtá otázka, zda se vyskytnou také čtyřcykly, vícecykly? Je jisté, že budou takové orbity reprezentovat dané unary, jen nejsme schopni přesně určit jejich tvar. Ze všech předchozích úvah vyplývá, že sledovaná problematika není triviální. Proto jsme si ani nekladli nároky přinést její vyčerpávající popis, snažili jsme se jí pouze čtenáři přiblížit, abychom ukázali složitost celého problému. Pokusili jsme se na příkladu kvadratických funkcí předvést, že i na tomto jednoduchém učivu lze demonstrovat krásu matematiky a studentům dát prostor k samostatnému matematickému experimentování. Naznačené problémy jsou vhodné do speciálních výběrových seminářů a jsou vhodné pro nadané studenty. Problematika teorie iterací pomáhá modelovat řadu dějů probíhajících v reálném světě. Souvisí s teorií chaosu či fraktální geometrií. Má tedy velké využití v technice, v ekonomii, počítačových technologiích. Domníváme se proto, že ukázky takové matematiky jsou jednou z možností, jak demonstrovat účinnost a sílu matematických metod.

Reference

BINTEROVÁ, H., 2003a. O jistém dvouparametrickém systému kvadratických funkcí. *University of South Bohemia. Department of Mathematics Report Series.* **11**(1), 25–32. ISSN 1214-4681.

BINTEROVÁ, H., 2003b. Charles Babbage (1792–1871) a Ada Lovelace (1815–1852). *Učitel matematiky.* **11**(2), 85–96. ISSN 1210-9037.

BINTEROVÁ, H., J. CHVALINA a L. CHVALINOVÁ, 2004. Discrete quadratic dynamical systems and conjugacy of their generating functions. In: *Aplimat 3. International Conference.* Bratislava: Slovak University of Technology Bratislava. Str. 283–288. ISBN 80-227-1995-1.

BERÁNEK, J. a J. CHVALINA, 1990. On Tabor’s problem concerning a certain quasi-ordering of iterative roots of functions. *Aeqationes Mathematicae.* **39**(1), 1–6. ISSN 0001-9054.

BERÁNEK, J. a J. CHVALINA, 2002. O iteračních odmocninách kvadratické funkce. In *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Trnaviensis.* Séria C – matematika. Trnava: Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta. Str. 5–10. ISBN 80-89074-51-0.

BIJEV, G. a K. TOMODOROV, 1985. Coregularity in semigroups and unars. In: *Proceedings of the II International Symposium "n-ary Structures", Varna 1983*. Sofia: Center of Applited [sic] Mathematics. Str. 17–21.

CHVALINA, J., 1995. *Funkcionální grafy, quasi-uspořádané množiny a komutativní hypergrupy.* Brno: MU Brno. ISBN 80-210-1148- 3.

KRECH, I., 2006. Fáze matematizace a proces aplikace matematiky ve výuce na střední škole. In: *Sborník příspěvků konference: Nové metody propagace přírodních věd mezi mládeží.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci. Str. 7–8. ISBN 80-244-1524-0.

Theory of iterations and monounary algebra in hight school

In this article we were concentrated on the possibilities of iteration theory usage in the theory of monounary algebras. We studied especially two-parameter family of quadratic function $f(x, t, s) = f(x + t)^2 + s$, among others because of the importance of quadratic functions in school mathematics and significance of simple non-linear models. We were thinking about the description of blocks of conjugated functions.

Keywords: iteration theory, mono-unary algebra, quadratics functions

Kontaktní adresa:
RNDr. Helena Binterová, Ph.D., Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, Jeronýmova 10, 371 15, České Budějovice, e-mail: *hbinter@pf.jcu.cz*

prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, Jeronýmova 10, 371 15, České Budějovice, e-mail: *tlusty@pf.jcu.cz*

BINTEROVÁ, H. a P. TLUSTÝ. Teorie iterací a monounární algebry ve vysokoškolské matematice. *Littera Scripta.* 2011, **4**(2), 169–177. ISSN 1802-503X.
