

Několik poznámek ke stereometrii stavebních objektů z hlediska jejich energetické efektivity

Radimír Novotný

Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích

Abstrakt

Stavební objekty musí podle svého funkčního účelu respektovat (v podstatě daný) normalizovaný rozdíl vnitřní požadované teploty a reálně uvažované teploty vnějšího prostředí. U obytných či provozních budov např. žádáme co největší obestavěný prostor s co možná nejmenším povrchem opláštění, u chladicích objektů naopak požadujeme co možná největší povrch vzhledem k potřebnému objemu stavby. Z úsporně energetického popř. z provozně technického hlediska tedy u staveb v podstatě záleží na poměru „obsah povrchu pláště objektu ku jeho obestavěnému prostoru“. Komplementem tohoto základního požadavku je druhé kritérium, totiž respektování tepelně izolačních vlastností pláště objektů. Jsou-li tepelně izolační vlastnosti materiálu opláštění posuzovaného objektu jednoznačně věcí fyziky (zejména termodynamiky), jsou jeho porovnatelné geometrické vlastnosti ukazateli ryze stereometrickými. A právě těmito prostorově geometrickými vlastnostmi u některých tvarově elementárních objektů, pokud jde o jejich optimální funkční využitelnost, se zabývá předkládaný příspěvek, aby diskutoval zpravidla nevyhnutelný rozpor mezi jejich tepelně energetickými výhodami a doprovodnými prostorovými či stavitelskými (z hlediska materiálových úspor nebo z hlediska výrobně prováděcího) negativy.

Klíčová slova: Energeticky úsporné stavební objekty, stereometrická optimalizace stavebních objektů, kubatura resp. zastavěný objem objektu, obsah povrchu objektu, plášť stavebních objektů, chladicí objekty (věže)

Úvod

Pro následující úvahy nejprve zdůvodněme několik dobře známých záležitostí z rovinné geometrie, které níže použijeme. Předně, ze všech obdélníků o stranách a a b daného obsahu $P = a \cdot b$ má nejmenší obvod $O = 2 \cdot (a + b)$ právě čtverec. Je totiž $O(a) = 2 \cdot \left(a + \frac{P}{a}\right)$. Extrém této funkce plyne z rovnice $\frac{dO(a)}{da} = 2 \cdot \left(1 - \frac{P}{a^2}\right) = 0$ a z ní je ihned vidět, že $a = \sqrt{P}$, takže

i $b = \sqrt{P} = a$. A poněvadž vychází $\frac{d^2O(a)}{da^2} = \frac{4 \cdot P}{a^3} > 0$, $a > 0$, jde skutečně o minimum funkce. Podobně ze všech elips o poloosách a a b a **daného** obsahu $P = \pi \cdot a \cdot b$ má nejmenší obvod právě kružnice. K výpočtu obvodu O elipsy postačí (namísto poměrně komplikovaného „exaktního“ vzorce) použít přibližné formulky $O \approx \pi \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (a + b) - \sqrt{a \cdot b} \right]$, kde $b = \frac{P}{\pi \cdot a}$. Tak pro obvod elipsy obdržíme vztah $O(a) \approx \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a + \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{a} - \sqrt{\pi \cdot P}$. Extrém této funkce vyplývá z rovnice $\frac{dO(a)}{da} = \pi - \frac{P}{a^2} = 0$. Z ní je vidět, že $a = \sqrt{\frac{P}{\pi}} = b$. A poněvadž je také $\frac{d^2O(a)}{da^2} = \frac{3 \cdot P}{a^3} > 0$, $a > 0$, jde také o minimum.

Připomeňme dále ten fakt, že **nejmenší** poměry „povrch tělesa k jeho objemu“ jsou vlastní tělesům s (alespoň přibližně) shodnými vzdálenostmi každého bodu jejich co nejméně členitých plášťů od těžišť (či alespoň jakýchsi „středů“) uvažovaných těles. A právě stavební objekty s takovými minimálními poměry jsou logicky považovány za optimální, pokud jde o jejich energetickou i stavebně materiálovou úspornost. Naopak **největší** poměr „povrch (rotačně symetrického a „hladkého“) tělesa k jeho objemu“ teoreticky vychází pro těleso tvaru špulky vzniknuvší rotací meridiánu (poledníku) o rovnici $y(x) = \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x)$, $c > 0$ kolem osy x . Toto těleso má poloměr hrdla v počátku 0 kartézské soustavy souřadnic $\{0; x; y\}$, a to $r_o = \frac{1}{c}$, přičemž uvažovaný poměr „povrch k objemu“ činí $2 \cdot c$ při nezapočítání obsahu obou omezujících podstav. Stereometrické vlastnosti tohoto speciálního tělesa jsou tedy optimální pro ochlazování jeho teplejšího objemového obsahu vzhledem k vnějšímu, pláštěm oddělenému chladnějšímu médiu. O tomto případě bude podrobněji pojednáno v jednom z dalších odstavců tohoto článku; jde v něm o opačný problém než ten, který spočívá v nalézání optimální morfologie objektů z hlediska konzervování jejich vnitřní teploty.

Zaměříme se nejprve na tepelně co nejúspornější objekty, a to na prizmatické (hranolové) objekty s kolmou obdélnou podstavou, na kolmé válcové objekty s eliptickou podstavou a konečně na objekty kulové, tedy na ty elementární prostorové objekty, u kterých lze předpokládat příznivě nízké poměry „povrch tělesa k jeho objemu“. Vzhledem k tepelně technickým předpokladům ukážeme funkční optimalizaci hranolových i válcových objektů a posléze se dotkneme optimalizace objektů chladicích. Konečně, provedeme i některá porovnání výsledků s nezbytnou diskusí. Nadále budeme předpokládat, že je dán **stálý objem V pro všechna uvažovaná tělesa**.

Hranolový objekt se čtvercovou podstavou

Fakt obsažený v úvodním odstavci opravňuje k předpokladu, že „nejúspornější“ ze všech kolmých hranolů je ten, který má čtvercovou podstavu. Označme objem nadepsaného objektu V a jeho povrch S . Patrně platí $V = a^2 \cdot h$

a $S = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h$, kde a je délka hrany podstavy a h je výška hranolu. Vyšetřeme, pro jaké h při daném V bude povrch S minimální. Snadno dospějeme ke vztahu $S(h) = 2 \cdot V \cdot h^{-1} + 4 \cdot \sqrt{V} \cdot h^{\frac{1}{2}}$, z něhož запиšeme (po drobné úpravě) nutnou podmínku pro extrém, totiž $\frac{dS(h)}{dh} = -\frac{V}{h^2} + \sqrt{\frac{V}{h}} = 0$, neboli $\frac{\sqrt{a^2 \cdot h}}{\sqrt{h}} = \frac{a^2 \cdot h}{h^2}$. Odsud plyne, že $h = a$. Provedme ještě $\frac{d^2S(h)}{dh^2} = 3 > 0$ (po úpravách a dosazení). Jde tedy skutečně o minimum funkce $S(h)$. Proto ze všech kolmých hranolů se čtvercovou podstavou a pevně daného objemu má nejmenší povrch krychle o hraně a , nebo-li

$$\min. \frac{S}{V} = \frac{6}{a} = \frac{6}{\sqrt[3]{V}}. \quad (1)$$

Válcový objekt s kruhovou podstavou

Přidržíme-li se zavedených označení a nahlédneme-li, že ze všech kolmých válců s eliptickou podstavou o daném objemu V má nejmenší povrch válec kruhový (viz úvodní odstavec), bude pro (stálý) objem tohoto objektu platit $V = \pi \cdot r_V^2 \cdot h$ a $S_V = 2 \cdot \pi \cdot r_V \cdot (r_V + h)$, kde r_V je poloměr kruhové podstavy a h je výška válce. Opět se naskytá otázka, pro které h při daném V bude povrch S_V minimální.

Při $r_V = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ odvodíme po drobné úpravě $S_V(h) = 2 \cdot \left(\frac{V}{h} + \sqrt{\pi \cdot V \cdot h} \right)$.

Odsud pak z nutné podmínky pro extrém $\frac{dS_V(h)}{dh} = 0$ dospějeme k rovnici

$$-V \cdot h^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot V} \cdot h^{-\frac{1}{2}} = 0, \text{ z níž vychází, že } h = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}}, \text{ což vzhledem}$$

k hořejšímu vzorci $V = \pi \cdot r_V^2 \cdot h$ ukazuje na $h = 2 \cdot r_V = d_V$, kde d_V je průměr podstavné kružnice. A poněvadž vychází (po dosazení a úpravách) také

$$\frac{d^2S_V(h)}{dh^2} = \frac{3}{4} \cdot \pi > 0, \text{ jde o minimum funkce } S_V(h). \text{ Proto ze všech kolmých}$$

válců s kruhovou podstavou a daného objemu má nejmenší povrch právě ten válec, jehož průměr je roven jeho výšce. Zcela obdobně můžeme vyslovit, že

pro daný objem V je při $h = \frac{V}{\pi \cdot r_V^2}$ povrch pláště uvažovaného válcového

objektu dán funkcí $S_V(r_V) = 2 \cdot \left(\pi \cdot r_V^2 + \frac{V}{r_V} \right)$, jejímž minimem je hodnota

$$S_{V\min.} = 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \pi \cdot V^2} \text{ při}$$

$$r_V = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} \approx 0,5419261 \cdot \sqrt[3]{V}. \quad (2)$$

Ověření tohoto faktu již ponecháváme na čtenáři. Z řečeného také plyne, že platí

$$\min. \frac{S_V}{V} = \frac{S_{V\min.}}{V} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \pi}{V}} \approx 5,5358101 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{V}}. \quad (3)$$

Kulový objekt

Pro objem koule platí známý vztah $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_K^3$ a její povrch je pak dán vzorcem $S_K = 4 \cdot \pi \cdot r_K^2$; r_K značí její poloměr. Pro daný objem tak vychází

$$r_K = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{V}{\pi}} \approx 0,6203505 \cdot \sqrt[3]{V}. \quad (4)$$

Vzhledem k (4) ihned po drobné úpravě vyplýne, že $S_K = \sqrt[3]{36 \cdot \pi \cdot V^2}$, takže

$$\frac{S_K}{V} = \frac{\sqrt[3]{36 \cdot \pi}}{\sqrt[3]{V}} \approx \frac{4,8359751}{\sqrt[3]{V}}. \quad (5)$$

Poměr udaný vztahem (5) je také absolutně nejmenší z reálných prostorových objektů, srovnej též se vzorci (1) a (3). Z hlediska minimalizace povrchu pláště k danému objemu je tedy kulový objekt asi 1,241 krát energeticky i materiálově úspornější než objekt krychelný a cca 1,145 krát energeticky a materiálově úspornější než optimální objekt válcový. Potvrzuje se také, že minimalizování čísla „povrch ku objemu“ je úměrný míře prostorové souměrnosti uvažovaného objektu, přičemž nejvyšší míra prostorové symetrie náleží právě kulové ploše.

Rotačně symetrický objekt s meridiánem $y(x) = \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x)$

Tento objekt byl již vlastně zmíněn v úvodním odstavci tohoto příspěvku. Označme povrch jeho pláště plynoucí pouze z rotace meridiánu S_m a povrch (obou) podstav S_p . Dále označme jeho celkový povrch $S_H = S_m + S_p$ a podle předpokladu V jako jeho pevně daný objem. Bude-li (viz výše) platit $\max. \frac{S_m}{V} = 2 \cdot c$, $c > 0$, pak lze očekávat, že rovněž i poměr $\frac{S_H}{V}$ bude maximální. Předpokládejme ale, že prozatím podobu meridiánu neznáme. Označme jej $y = y(x)$ a předpokládejme dále, že bude na libovolném úseku $(k_2 - k_1)$ osy x zavedené souřadné soustavy existovat jediný bod $k_* \in (k_2 - k_1)$, v němž platí $y'(k_*) = \frac{y(k_2) - y(k_1)}{k_2 - k_1}$. Zaměřme se nejprve jen na rotačně symetrický plášť S_m a uvažujme jej v mezích k_1 a k_2 , takže $(k_2 - k_1)$ bude délka vyšetřovaného objektu. V kartézských souřadnicích $\{0; x; y\}$ zapíšeme $S_m = \int_{k_1}^{k_2} 2 \cdot \pi \cdot y(x) \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot \int_{k_1}^{k_2} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx$ a $V = \pi \cdot \int_{k_1}^{k_2} y^2(x) \cdot dx = konst.$ Tažme se nyní, kdy bude poměr $\frac{S_m}{V}$ extrémní (maximální). Patrně hledáme extrém funkcionálu

$$I = \frac{S_m}{V} = \frac{1}{V} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \int_{k_1}^{k_2} y(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx = \frac{2 \cdot \pi}{V} \cdot \int_{k_1}^{k_2} F(y, y') \cdot dx.$$

Aby měl funkcionál tohoto typu extrém, musí být splněna Eulerova diferenciální rovnice tvaru

$$F(y, y') - y' \cdot F_{y'}(y, y') = C$$

s tím, že C je nějaká konstanta. Aplikováním této diferenciální rovnice na náš případ dostaneme

$$y \cdot \sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot \left[y \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot y' \right] = C.$$

Poslední vztah po úpravách vede na diferenciální rovnici našeho problému, totiž na

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C. \quad (6)$$

A právě této rovnici vyhovuje výše uvedený meridián $y(x) = \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x)$, $c > 0$ (očekávaná konvexní funkce), totiž pro $C = \frac{1}{c} = konst.$ Řešení (6) je symetrické kolem osy y zavedené kartézské soustavy souřadnic. Proto lze (vzhledem k souměrnosti) zapsat $V = \pi \cdot \int_{-k_1}^{+k_1} y^2(x) \cdot dx = 2 \cdot \pi \int_0^{k_1} y^2(x) \cdot dx = \frac{2 \cdot \pi}{c^2} \cdot \int_0^{k_1} \cosh^2(c \cdot x) \cdot dx$. Po provedení posledního integrálu dostaneme

$$V = \frac{\pi}{c^2} \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \sinh(c \cdot k_1) \cdot \cosh(c \cdot k_1) + k_1 \right]. \quad (7)$$

Podobně lze zapsat (již stručněji) $S_m = \frac{4 \cdot \pi}{c} \cdot \int_0^{k_1} \cosh^2(c \cdot k_1) \cdot dx$, neboli je vidět, že skutečně platí $\frac{S_m}{V} = 2 \cdot c = konst.$, c je určitý kladný parametr (v jednoparametrické rovnici této třídy meridiánů). Pro daný objem V lze vypočítat mez k_1 , resp. délku tělesa $2 \cdot k_1$, a to z rovnice (7). Použijeme-li definice funkcí „hyperbolický sinus“ a „hyperbolický kosinus“, lze (7) upravit na implicitní tvar

$$\frac{V \cdot c^2}{\pi} = \frac{1}{4 \cdot c} \cdot (e^{2 \cdot c \cdot k_1} - e^{-2 \cdot c \cdot k_1}) + k_1,$$

tedy na

$$\frac{2 \cdot V \cdot c^3}{\pi} - 2 \cdot c \cdot k_1 = \sinh(2 \cdot c \cdot k_1). \quad (8)$$

Z rovnice (8) pak plyne $k_1 = k_1(V, c)$, takže abychom dostali „srovnávací“ výraz vzhledem k rovnicím (1), (3) a (5), zapíšeme

$$\max. \frac{S_H}{V} = \frac{S_m + S_p}{V} = \frac{2 \cdot V \cdot c + 2 \cdot \pi \cdot r_p^2}{V},$$

kde pro poloměr podstavy r_p platí $r_p = \frac{1}{c} \cdot \cosh[c \cdot k_1(V, c)]$. Tak se po drobné úpravě dobereme k hledanému vztahu

$$\max. \frac{S_H}{V} = 2 \cdot \left\{ c + \frac{\pi}{V} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \cosh^2[c \cdot k_1(V, c)] \right\}. \quad (9)$$

Ve vztahu (9) však nastává určitá potíž v tom, že nelze explicitě vyjádřit $k_1 = k_1(V, c)$. A tak se zaměříme na vhodné numerické řešení. Zvolme pevně daný jednotkový objem $V = 1$. Jemu odpovídá krychle o hraně $a = 1$, přičemž počátek kartézské soustavy souřadnic zvolme ve středu (těžišti) uvažované krychle. Nyní je třeba realisticky volit poloměr hrdla r_o vyšetřovaného rotačně symetrického tělesa, totiž $r_o = C \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Odsud pak dostaneme $c = \frac{1}{r_o}$, načež iterací z (8) nalezneme přísl. x -ovou souřadnici k_1 . Potom již snadno stanovíme délku tělesa $2 \cdot k_1$, oba stejné poloměry podstav, poměr daný rovnicí (9) atp. Čtenář si může lehce ověřit, že např. pro $r_o = 0,25$ je $c = 4$, takže vychází $k_1 \approx 0,536$, $r_p \approx 1,083$ a $\max. \frac{S_H}{V} \approx 15,369$. Dále např. pro $r_o = 0,375$ je $c = 2,666 \dots$, takže vychází $k_1 \approx 0,545$, $r_p \approx 0,846$ a $\max. \frac{S_H}{V} \approx 9,828$. A ještě např. pro $r_o = 0,125$ je $c = 8$, kdy bude $k_1 \approx 0,403$, $r_p \approx 1,573$ a $\max. \frac{S_H}{V} \approx 31,547$ atd.; veličiny $r_o = C$, r_p a k_1 jsou délkové, veličiny c a $\max. \frac{S_H}{V}$ pak mají rozměr „délka na minus prvu“. Je tedy vidět (a lze to i zobecnit), že čím je poloměr hrdla r_o bližší hodnotě $\frac{a}{2}$, tím méně se liší od poloměru omezujících podstav r_p , tím více se prodlužuje horizontální délka $2 \cdot k_1$ studované rotačně symetrické plochy a tím menší vychází hodnota $\max. \frac{S_H}{V}$. Je ale zřejmé, že nelze připustit enormní nárůst veličiny $\max. \frac{S_H}{V}$ [uvažme, že je $\lim_{x \rightarrow +\infty} \max. \frac{S_H}{V} = +\infty$], ačkoliv by to bylo v některých fyzikálních aplikacích velice výhodné (právě případ chladicích objektů). Důvod je jednak stavebně prováděcí („dramatický“, tedy technicky obtížně vytyčitelný meridián), jednak statický (poněkud „divoká“ morfologie rotačně symetrické skořepiny přispívá k enormnímu vzrůstu jejích konzolových ohybových momentů působících v rovině poledníků) a jednak i prostorový (značný vzrůst r_p oproti r_o). Přidržíme-li se zavedené kartézské souřadné soustavy (ta byla doposud uvažována v nárysně) a připojíme-li horizontální osu $+z$ jdoucí počátkem 0 (- vlastně těžištěm uvažované krychle i rotační skořepiny), pak můžeme analyzovanou rotačně symetrickou plochu kolem vodorovné osy x popsat rovnicí

$$y^2 + z^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \cosh^2(c \cdot x) = 0 \quad (10)$$

platnou pro právě zavedenou soustavu $\{0; x; y; z\}$. Porovnejme konečně vztahy (1), (3) a (5) s (9) při uvažování $V = 1$ a $a = 1$ (viz výše). Je patrné, že pro „rozumně“ volený poloměr hrdla r_o je $\max. \frac{S_H}{V}$ výrazně (až velmi výrazně) větší než $\min. \frac{S}{V} > \min. \frac{S_V}{V} > \frac{S_K}{V}$. Poznamenejme dále, že (jak plyne z formulace výše uvedeného funkcionálu) není samozřejmě nutné fyzikálně využít pouze symetrický úsek plochy (10) (s rovinou symetrie $(yz) \equiv x = 0$), ale že je možné uplatnit i tu její část, která není kolem žádné z rovin kolmých

k ose x souměrná a že pro „nevelké“ difference poloměrů r_p a r_o lze plochu (10) s „malou“ chybou nahradit odpovídajícím jednodílným rotačním hyperboloidem s osou x uvažované souřadné soustavy. Toto ověření není obtížné a ponecháváme jej již na čtenáři. Konečně podotkneme, že „chladičí efekt“ (oboustranně omezeného) objektu (10) by bylo možno ještě zvýšit tzv. vřapováním plochy S_m např. tak, že by se využilo jakéhosi pravidelného, periodicky se opakujícího „prolamování“ jejího poledníku $y(x) = \frac{1}{c} \cdot \cosh(c \cdot x)$, $c > 0$; ten by se tak stal určitou střednicí „nového“, členitějšího meridiánu.

Tepelně energetická i nákladově materiálová úspornost versus prostorová využitelnost objektů

V tomto odstavci se zaměříme na tu skupinu objektů, u nichž z ekonomických důvodů požadujeme dosažení hodnot blízkých $\min. \frac{S_V}{V}$ resp. $\frac{S_K}{V}$, popř. též $\min. \frac{S}{V}$ (viz výše), tedy na objekty provozního, resp. obytného charakteru. Následující úvahy provedeme zejména pro kolmý kruhový válcový objekt s průměrem rovným jeho výšce i pro objekt kulový tak, jak byly analyzovány v předchozích odstavcích.

Je zřejmé, že z hlediska prostorové využitelnosti stavebních objektů jsou optimální takové, které mají svislé rovinné stěny a (prakticky bezpodmínečně) rovinnou (vodorovnou) podlahu. Důvodem je především zpravidla pravoúhle prizmatický a „kolmý“ tvar zařizovacích předmětů. Avšak tato „perpendikularita“ vnitřního vybavení není důvodem jediným; podle mínění mnohých psychologů i architektů je lidem vlastní spíše tradiční pravoúhle uspořádaný hranolový tvar obývaných místností, než jsou ty tvary obytných prostor, které mají šikmé, nepravoúhlé, nebo dokonce zakřivené stěny a stropy. Vyjdeme-li z těchto poznatků, musíme (limitně) předpokládat v případě analyzovaného kruhového válcového objektu hranolový vepsaný využitelný prostor a v případě kulového objektu pak počítat s využitelným prostorem ve tvaru vepsané krychle.

V případě kruhového válcového objektu jsme odvodili vztahy (2) a (3). Čtenář si snadno ověří, že délka strany čtverce vepsaného do kružnice o poloměru podstavu r_V je $a_V = 2 \cdot \frac{r_V}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot r_V \approx 1,4142136 \cdot r_V$. Vzhledem ke (2) je potom $a_V = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}} \cdot a \approx 0,7663992 \cdot a$, kde $a = \sqrt[3]{V}$. Nyní již můžeme vypočítat hranolový objem prostoru se čtvercovou podstavou, který je vepsán do uvažovaného válce jako $V_V = a_V^2 \cdot h_V = 2 \cdot a_V^2 \cdot r_V$. Po dosazení a drobných úpravách posléze dospějeme k

$$V_V = \frac{2}{\pi} \cdot a^3 \approx 0,6366198 \cdot a^3. \quad (11)$$

Pokud jde o kulový objekt, dostali jsme se ke vztahům (4) a (5). Nyní půjde o zmenšený krychelný objem $V_K = a_K^3$, který je vepsán do kulové plochy, takže s ní má společných právě 8 bodů. Označíme-li stranu takovéto objemové krychle a_K , pak zřejmě můžeme zapsat pythagorejský vztah ve tvaru $r_K =$

$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{a_K}{2}\right)^2}$. Odsud plyne $a_K = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r_K \approx 1,1547005 \cdot r_K$, popř. vzhledem ke vzorci (4) též $a_K = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot \pi}} \cdot a \approx 0,7163190 \cdot a$. Povšimněme si, že úhel β , který svírá prostorová uhlopříčka „vepsané krychle“ s její horizontální podstavou, je menší než $\frac{\pi}{4}$. Je totiž $\beta = \arctg \frac{\frac{r_K}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{r_K}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \approx$

$35,26439^\circ < 45^\circ$. Po dosazeních a úpravách konečně dospějeme ke vztahu

$$V_K = \frac{6}{\sqrt{27} \cdot \pi} \cdot a^3 \approx 0,3675525 \cdot a^3. \quad (12)$$

Výsledky (11) a (12) ukazují, že energeticky nejúspornější kulový objekt může být prostorově až asi 2,72 krát horší z hlediska prostorové využitelnosti než objekt krychelný (!). Podobně energeticky „dobře přijatelný“ kolmý kruhový válcový objekt o průměru podstavy stejném, jako je jeho výška, může být až cca 1,57 krát prostorově nevýhodnější než objekt krychelný, srovnej s „tepelně a materiálově úspornými“ výsledky na konci čtvrtého odstavce tohoto příspěvku.

Závěr

Předložený příspěvek analyzoval energetickou i materiálovou účelnost několika tvarově typických objektů, a to z hlediska stereometrického. Zaměřil se na objekty s hranolovou (zejména krychelnou) konturou, na eliptické (ale především kruhové) kolmé válcové objekty, dále na objekty kulové a konečně na speciální chladič objekty s maximalizovaným poměrem „povrch objektu k jeho obestavěnému objemu“. Vedle stereometrie staveb plynoucí z fyzikálně funkční a ekonomické analýzy řešil i prostorové účelové vlastnosti u vybraných objektů, aby poukázal na ten fakt, že poměrně nevelká „úspornost“ (z energetických a stavebně materiálových hledisek) docílená stereometrickou „optimalizací“ může být anulována, ba převážena značnou nevýhodou ze stanoviska nízké prostorové využitelnosti objektu. Kvantifikované výsledky, zdá se, ukazují, že optimálními stavebními objekty daného obestavěného prostoru, pokud jde o objekty provozní a obytné, jsou ze stereometrického hlediska stavby s hranolovou konturou, která se co nejvíce tvarově blíží krychli. Takovéto „tvarově tradiční“ stavby jsou nejen energeticky a materiálově „dobře přijatelné“, nýbrž jsou nejvhodnější i z hlediska prostorového a prováděcího.

Jinou kapitolou jsou objekty chladič. Vyznačují se optimální funkcí, jsou však z hlediska materiálové spotřeby i provádění náročné. V praxi jde většinou o rotačně symetrické plochy s vertikální osou symetrie a s „rozumným“ poměrem $\frac{r_P}{r_o} \approx 1,3$ až $2,0$ (viz výše). Takovéto chladič objekty (věže) působí i dobrým estetickým dojmem.

Příspěvek pochopitelně nemohl analyzovat všechny tvarově „přijatelné“ objekty (např. pravidelné mnohostěny, kuželové plochy, jehlany, apod.), nicméně

podal jakýsi analytický návod, jak stereometricky posuzovat i objekty morfologicky podobné, resp. jiné.

Použité zdroje

DLESEK, V. *Minimalizace energetické náročnosti v pozemních stavbách*. Praha: SNTL/ALFA, 1984.

KNESCHKE, A. *Používanie diferenciálnych rovníc v praxi*. Bratislava: ALFA, Edícia teoretickej literatury, 1969.

REKTORYS, K. a kol. *Přehled užití matematiky*. 6. přepracované vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-200-1448-9.

A Few Notes to Buildings Stereometry in Terms of Energy Efficiency

Buildings must, in their functional purpose, respect (essentially given) normalized difference between desired internal temperature and real temperature of the external environment. For residential and service buildings we ask what the largest enclosed space with the least possible surface of casing, on the contrary for cooling buildings, we demand the greatest possible surface, regarding the necessary volume of buildings. From the energy-saving or a technical point of view, in the buildings it essentially depends on the ratio of “content of the surface of the building envelope to his enclosed space”. Complementary of this basic requirement is the second criterion, namely respect for the thermal insulation shell of objects. If the thermal insulation properties of the object coating material are considered to be a matter of physics (especially thermodynamic-sthrn proportional-geometric properties are pure stereometric indicators. The submitted papers deal with these spatial geometric properties of some elementary shapes of objects, in terms of their optimal functional usability, and discuss mostly inevitable contradiction between their thermal energy advantages and associated spatial or architectural negatives (in terms of material savings or in terms of production-implementing).

Keywords: energy-efficient structures, stereometric optimization of the construction objects, provided volume of an object, the area of the object surface, the shell of the objects, the cooling objects (towers)

Kontaktní adresa:

prof. Ing. Radimír Novotný, DrSc., Katedra techniky a aplikovaných věd, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 10, 370 01 České Budějovice, *e-mail:* novotny@mail.vstecb.cz

NOVOTNÝ, R. Několik poznámek ke stereometrii stavebních objektů z hlediska jejich energetické efektivity. *Littera Scripta*. 2012, 5(2), 251–260. ISSN 1802-503X.
